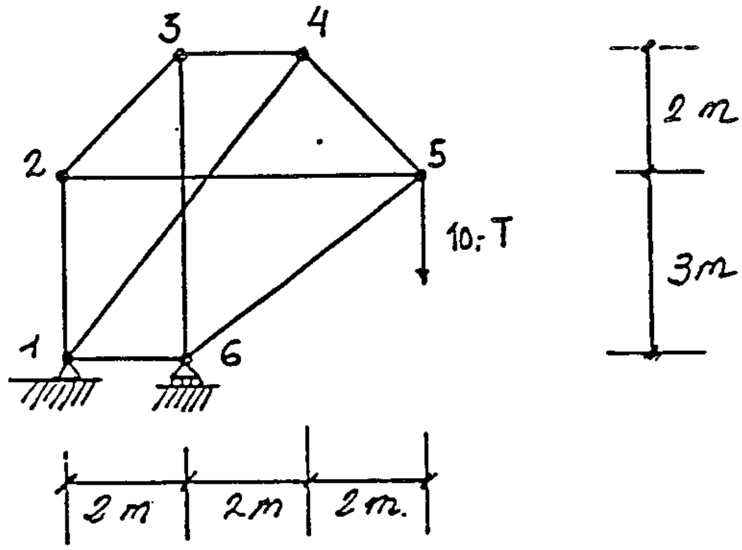
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

PROBLEMAS RESUELTOS

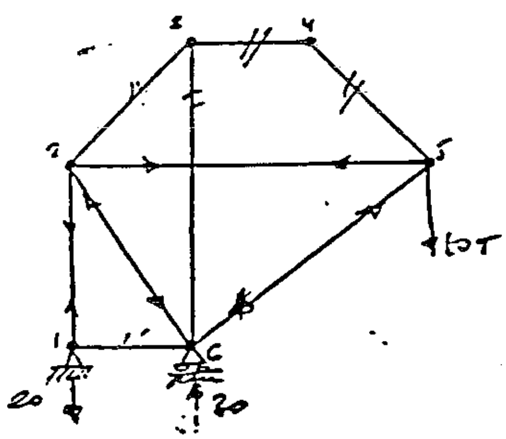
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

PROBLEMA . .-Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura.

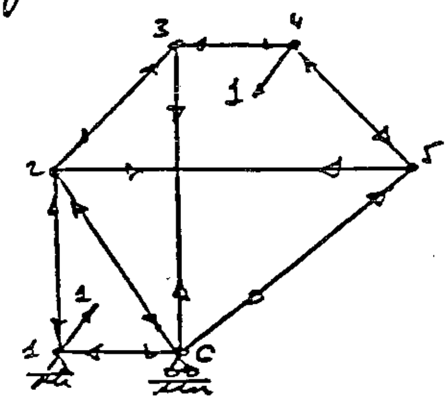
NOTA:En la figura se han numerado los nudos siendo el resto cruces de barras.



Se utiliza el método de Henneberg:



(0)



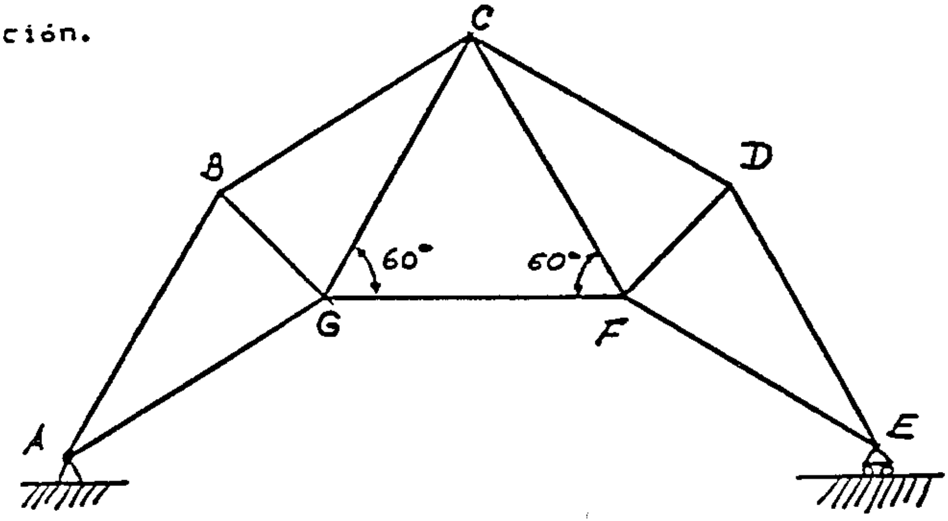
(I)

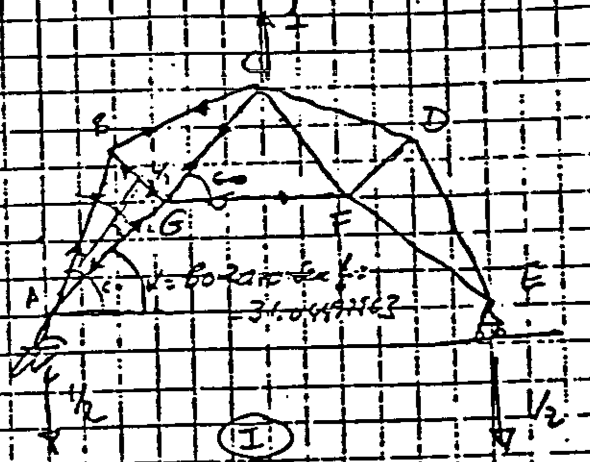
BARRO	N_i^0	N_i^I	$N_i = N_i^0 + R N^I$
1-2	20	-0.8321	46.64
1-6	0	-0.5547	17.76
2-3	0	-1.9878	63.65
2-5	13.33	1.822	-45.01
2-6	-24.037	-0.7507	0
3-4	0	-1.4056	45.01
3-6	0	1.4056	-45.01
4-1	—	1	-32.02
4-5	0	-1.1013	35.36
5-6	-16.667	-1.3014	25.

$$N_{26} = 0 = -24.037 - R\, 0.7507 \Rightarrow R = -\frac{24.037}{0.7507} = -32.019$$

PROBLEMA ...-Todas las barras de la estructura representada en la figura tienen la misma longitud L excepto las barras BG y FD de longitud L/2. Como consecuencia de errores de fabricación, todas las barras pueden ser 2.0 mm mas largas o mas cortas de la longitud debida.

Determinar que barras son mas largas y cuales son mas cortas, para que el punto C alcance la máxima altura respecto de su posición correcta debido unicamente a estos errores de ejecución.





$u_C^{\uparrow} = \Delta L^{k} \sum_{i=1} N_i^{\uparrow} (\text{sig. } \Delta L^{k})$

que será máximo cuando los signos de $N^{\uparrow}$ y de ΔL^{k} sean iguales.

Barras	N_i^{I}	
AB	0.88486	
BC	0.88486	
CD	0.88486	
DE	0.88486	
EF	−0.5164	*
FG	−0.7809	*
GA	−0.5164	*
GC	0.057	
GB	−0.44243	*
FC	0.057	
FD	−0.44243	*

* ⇒ 2mm mas cortas y el resto 2mm mas largas.

Nudo A:
$-N_{AG}\,\text{Sen}\,60 + \frac{1}{2} + N_{AB}\,\text{Sen}\,\alpha = 0$
$N_{AG}\,0.5 = N_{AB}\,\text{Cos}\,\alpha$
$N_{AG} = 0.5164$
$N_{AB} = 0.88486$

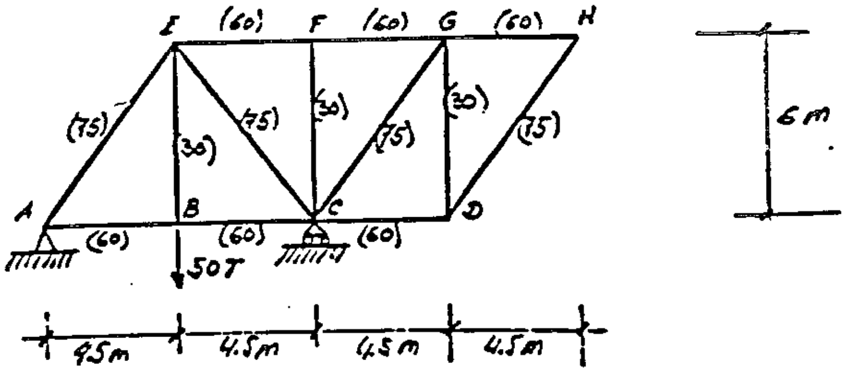
Nudo B:
$N_{BG}\,\text{Sen}\,\beta + N_{BC}\,\text{Cos}\,\alpha = 0.88486\,\text{Sen}\,30$
$N_{BG}\,\text{Cos}\,\beta + 0.88486\,\text{Cos}\,30 = N_{BC}\,\text{Sen}\,\alpha$
$\Rightarrow N_{BG} = -0.44243$, $N_{BC} = 0.8846$

Nudo G:
$N_{GC} = \frac{1}{\text{Sen}\,60}\left(0.5164\,\text{Sen}\,\alpha - 0.44243\,\text{Sen}\,\beta\right) = -0.057$
$N_{GF} = 0.44243\,\text{Cos}\,\beta + 0.5164\,\text{Cos}\,\alpha - N_{GC}\,\text{Cos}\,60 =$
$= -.7809$

PROBLEMA . Calcular la componente horizontal del corrimiento en el nudo G de la estructura representada en la figura.

Datos: Las áreas de las secciones de las barras se indican entre paréntesis en la figura(cm^2).

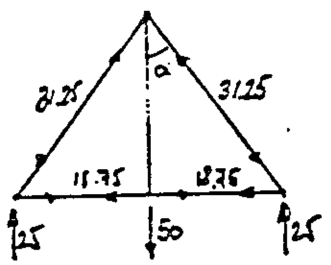
$E = 2.1 \times 10$ T/cm^2



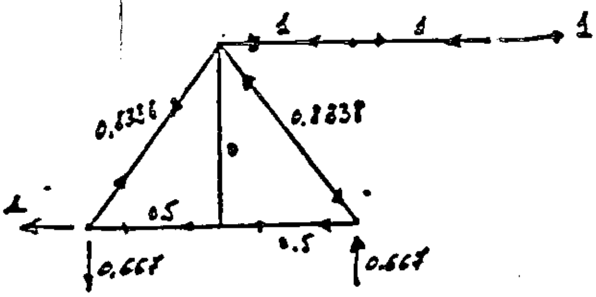
---

1) Esfuerzos debidos a la carga real :

$\operatorname{sen} \alpha = 0.6$
$\cos \alpha = 0.8$



2) Esfuerzos debidos a la carga unidad horizontal en G



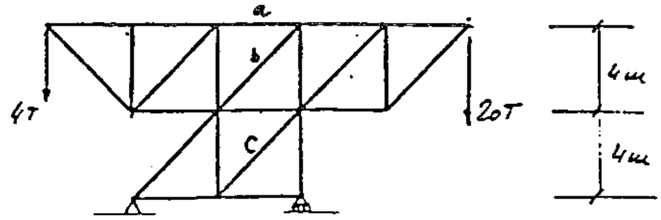
$$1 \cdot U_x^D = \sum_{barras} N_i^I \frac{N_i^{II} l_i}{E A_i}$$

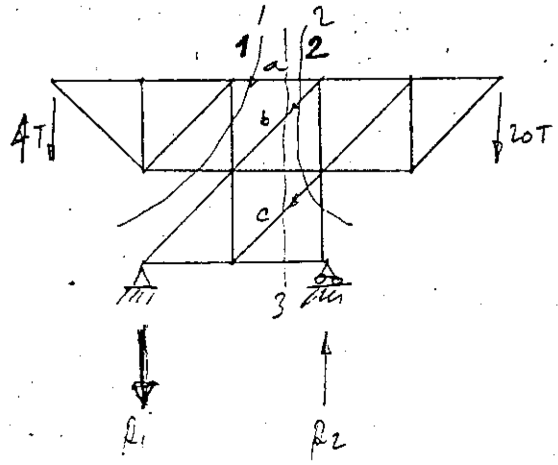
$$U_x^D = \frac{1.406 \frac{t}{cm^2} m}{2.1 \times 10^3 \, t/cm^2} = 0.67 \times 10^{-3} m$$

Barra	l_i (m)	A_i (cm^2)	N_i^I	N_i^{II}	$N_i^I \frac{N_i^{II} l_i}{A_i}$
AB	4.5	60	18.75	0.5	0.703
BC	4.5	60	18.75	0.5	0.703
AE	7.5	75	-31.25	0.8338	-2.606
CE	7.5	75	-31.25	-0.8338	2.606

$\Sigma = 1.406$

PROBLEMA __. Calcular los esfuerzos en las barras a,b,c de la estructura de la figura, indicando claramente si son de tracción o compresión.





$8 R_2 = 20 \times 16 - 16 = 304$; $\uparrow R_2 = 38$

$\downarrow R_1 = 14$ // C ... $= 20 \times 8 - 12 \times 4$

a) $4 \times 8 = N_a \times 4 \Rightarrow N_a = 8$ → TRACCION

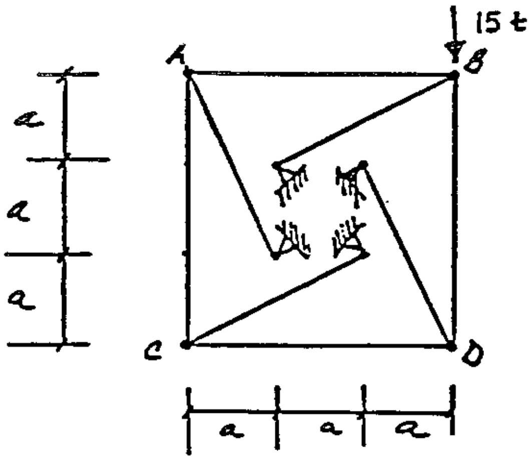
b) $d = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2} = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

$N_b \cdot 2\sqrt{2} + 8 \times 4 = 20 \times 8 \Rightarrow N_b = \frac{64}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\, 64}{2} = 32\sqrt{2} = 45.255$ ↗ TRACCION

c) $N_c \frac{\sqrt{2}}{2} + 32\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 38 - 20 \Rightarrow N_c = \sqrt{2}\,(18 - 32) = -14\sqrt{2} = 19.8$ (Compresión)

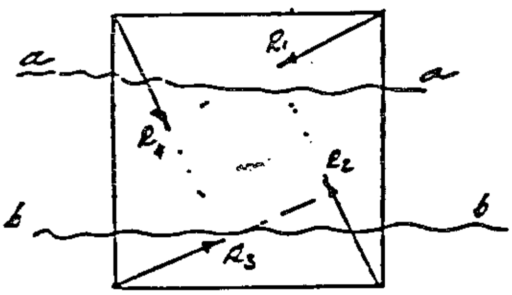
o tambien $N_c \frac{\sqrt{2}}{2} + 32\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 14 + 4 \Rightarrow N_c = -14\sqrt{2} = 19.8$

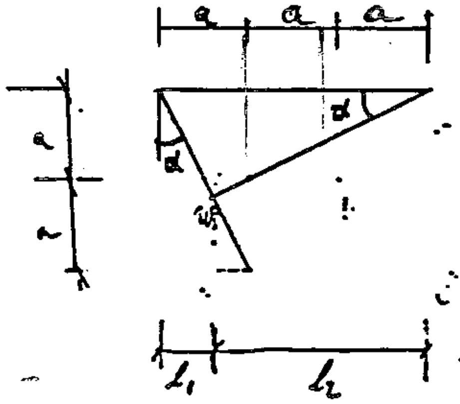
PROBLEMA ..- Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura.



$$\left.\begin{array}{l} n=4 \;;\; 2n=8 \\ b=4 \;;\; b+r=8 \\ r=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Determinada.}$$

Se trata de una compleja, pero se puede resolver dando las secciones a-a y b-b, ya que dispondremos de 6 ecuaciones y 6 incógnitas ($R_1, R_2, R_3, R_4, S_{AC}, S_{BD}$)

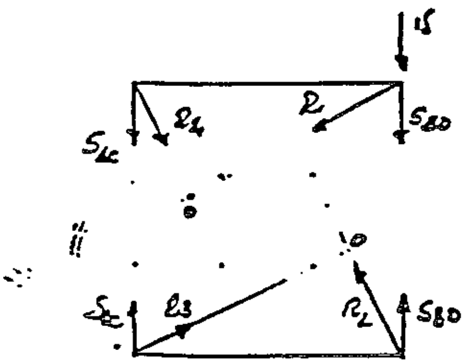




$$l = 3a \cos\alpha = 3\frac{2a}{a\sqrt5} = \frac{6a}{\sqrt5}$$

$$l_2 = \frac{6a}{\sqrt5}\cos\alpha = \frac{6a}{\sqrt5}\,\frac{2a}{\sqrt5\, a} = \frac{12a}{5}$$

$$l_1 = 3a - \frac{12a}{5} = \frac{15a - 12a}{5} = \frac{3a}{5}$$



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma M_o = 0 \Rightarrow S_{AC}\frac{3a}{5} - S_{BD}\frac{12a}{5} - 15\,\frac{12a}{5} = 0 \\ \\ \Sigma M_o = 0 \Rightarrow S_{AC}\frac{12a}{5} - S_{BD}\frac{3a}{5} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3S_{AC} - 4\cdot S_{BD} = 60 \\ 4S_{AC} - S_{BD} = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{S_{BD} = 4S_{AC} = -16}$$

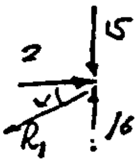
$$S_{AC} - 16S_{AC} = 60 \;;\; \boxed{S_{AC} = -4}$$

Nudo A:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow 4 - R_4 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \; ; \; \boxed{R_4 = 2\sqrt{5}}$$

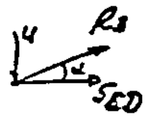
$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow S_{AB} + R_4 \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \; ; \; \boxed{S_{AB} = -2}$$

Nudo B:



$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow R_1 \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 \; ; \; \boxed{R_1 = \sqrt{5}}$$

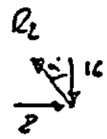
Nudo C:



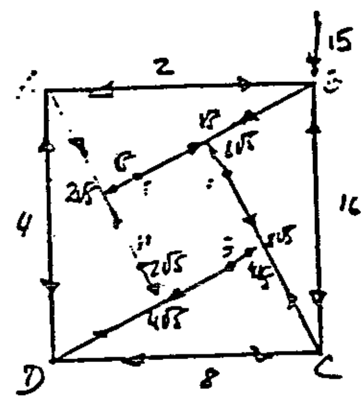
$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow R_3 \frac{1}{\sqrt{5}} = 4 \; ; \; \boxed{R_3 = 4\sqrt{5}}$$

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \boxed{S_{CD}} = -4\sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{-8}$$

Nudo D:



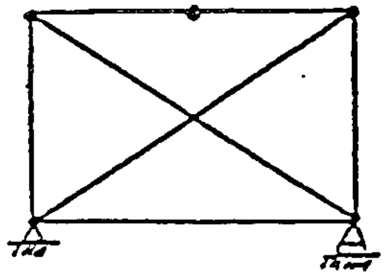
$$\boxed{R_2 = 8\sqrt{5}}$$



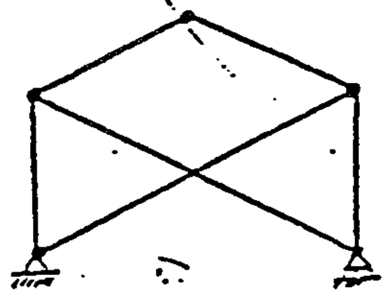
PRACTICA

De las estructuras representadas en las figuras siguientes.

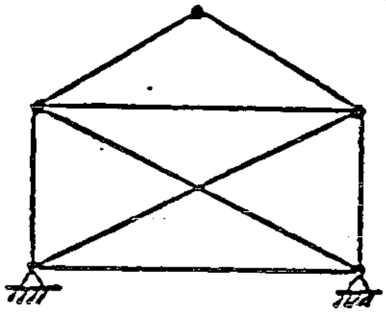
DE determinar razonadamente su ESTABILIDAD y GRADO HIPERESTATICO.



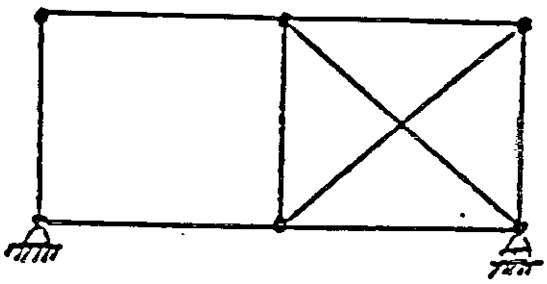
(fig 1)



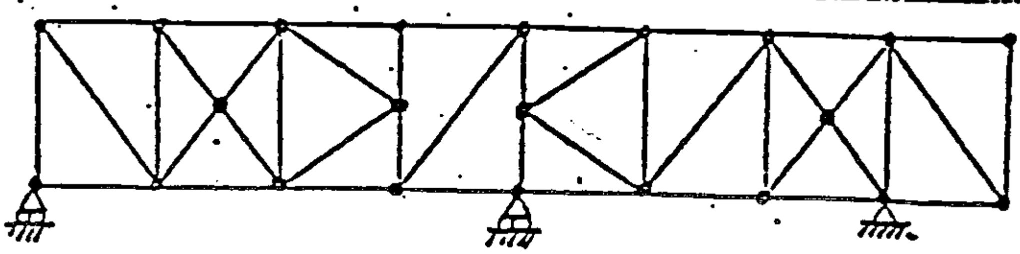
(fig 2)



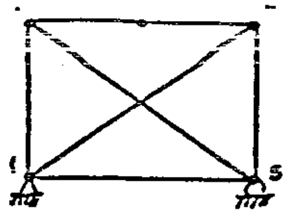
(fig 3)



(fig 4)



(fig 5)



(fig 1)

$$\left.\begin{array}{l} n=5 \\ b=7 \\ r=1 \\ m=1 \end{array}\right\} \quad 5\times 2=7+2\times 1+1=10$$

La estructura cumple la condición necesaria de isostaticidad pero esta condición no es suficiente.

Desde el punto de vista analitico la resolución de esta estructura nos lleva a un sistema de 10 ecuaciones con 10 incognitas que para que tenga solución es necesario que el discriminante de las incognitas sea distinto de cero

En este caso la estructura es estable externamente, pero la disposición de barras y nudos nos hace sospechar que la estructura es CRITICA dado que las barras 2-3 y 3-4 son colineales, de manera que el más pequeño cambio en sus longitudes o un ligero juego en sus articulaciones puede traducirse en un desplazamiento apreciable del nudo 3 con respecto a los otros.

Si sobre el nudo 3 actuase una fuerza vertical las barras 2-3 y 3-4 deben soportar esfuerzos infinitos para equilibrar dicha fuerza, lo que es fisicamente imposible. Lo que sucede en realidad es que al aplicar la fuerza vertical todas las barras del sistema se deforman ligeramente, permitiendo al nudo 3 ocupar una posición apreciablemente mas baja dependiendo estos alargamientos de las deformaciones elasticas de las barras que deberan tenerse en cuenta al analizar el reticulado. La estructura es ESTATICAMENTE INDETERMINADA.

En general lo dificil es determinar el discriminante por lo que se recurre al método llamado por Timoschenko "ENSAYO DE CARGAS NULAS" que consiste en ver si en la estructura sin cargas puede obtenerse una solución que satisfaga las condiciones de equilibrio en cada nudo.

El discriminante solo depende de la forma de la estructura y de ningun modo de como esta cargada. Por lo tanto una forma critica sera siempre estaticamente indeterminada independiente de su estado de carga.

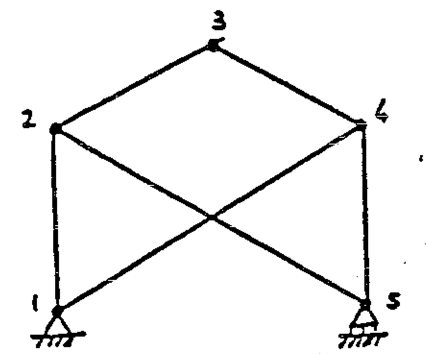
Realizando el ensayo de cargas nulas en la estructura que - nos ocupa, sin que actuen cargas exteriores en los nudos, supongamos que la barra 2-3 esta solicitada por un esfuerzo s de tracción. Resolviendo el equilibrio de cada nudo tendremos

$$N_{2-3} = N_{3-4} = N_{4-5} = N_{2-1} = N_{1-5} = + s$$

$$N_{2-5} = N_{1-4} = -\sqrt{2}\, s$$

Por tanto con cargas nulas podemos tener esfuerzos distintos de cero en las barras lo que indica forma CRITICA y por tanto = 0;

$$\text{fig 1} \begin{cases} \text{EXTERNA : Estable, Isostatica} \\ \text{INTERNA : Critica.} \end{cases}$$

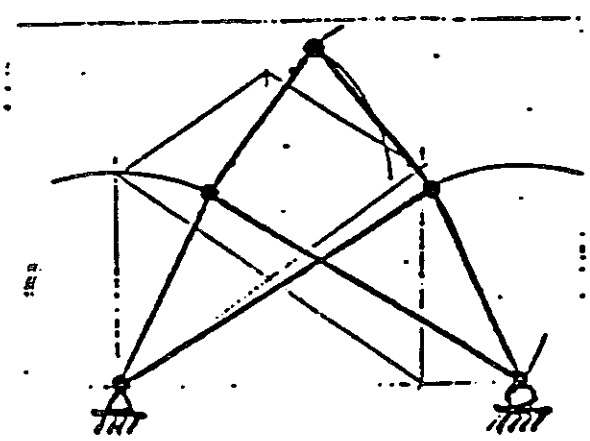


(fig 2)

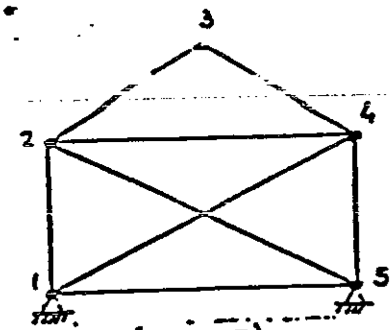
$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \\ b = 6 \\ m = 1 \\ f = 1 \end{array}\right\} \quad 5 \times 2 > 6 + 2 \times 1 + 1 = 9$$

La estructura es INESTABLE y por tanto inutilizable.

No conviene quedarse solo con la aplicación de la formula - sino tratar de ver el movimiento del mecanismo.



$$\text{fig 2} \begin{cases} \text{EXTERNA : Estable, Isostatic} \\ \text{INTERNA : Mecanismo.} \end{cases}$$



(Fig 3)

n=5
b=8
f=
m=0

$5x2 < 8 + 2x2 = 12$

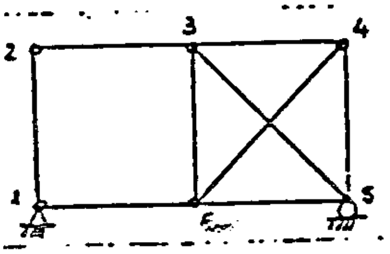
$GH = 8 + 2x2 - 5x2 = 2$

En principio la estructura es hiperestatica de grado 2.

La estabilidad interna esta asegurada dado que $b \geqslant 2n-3$ $8 > 2x5 - 3 = 7$ es decir existe una barra superabundante.

Un estudio de la estructura nos lleva a que la barra 1-5 al unir los nudos 1 y 5 fijos no trabaja es decir $N_{1-5} = 0$. Por tanto una vez determinada la reacción hiperestatica conoceremos los esfuerzos en todas las barras.

fig 3 { EXTERNA : Estable, Hiperestatica grado 1
INTERNA : Estable, Isostatica.



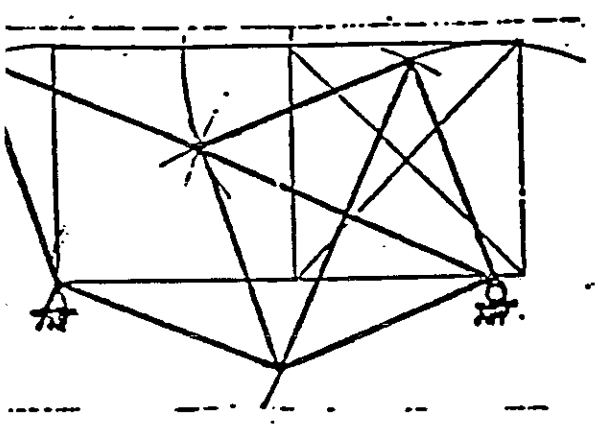
(fig 4)

n= 6
b= 9
f= 1
m= 1

$6x2 = 9 + 1x2 + 1 = 12$

La estructura satisface la condición necesaria de isostatismo pero no es suficiente.

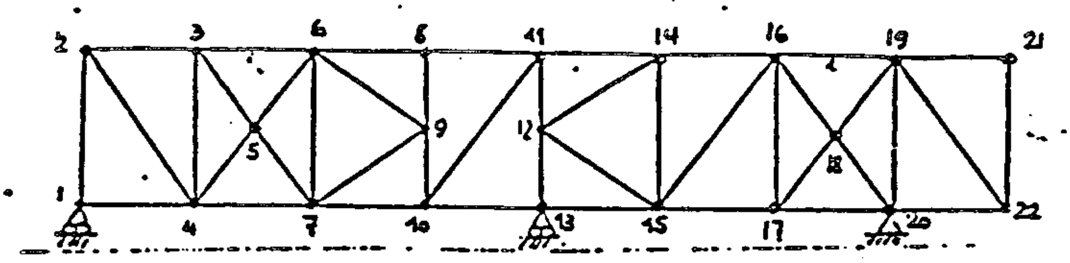
La observación detenida de la estructura nos pone de manifiesto que las barras, aunque suficientes para la estabilidad, estan mal distribuidas de forma que la zona izquierda(1236) es un mecanismo mientras que la derecha(345 tiene exceso de barras.



La estructura es internamente inestable como puede apreciarse en la figur

EXTERNA : Estable, Isostatica.

INTERNA : Inestable.



(fig 5)

$$\left.\begin{array}{l} n=22 \\ b=43 \\ m=2 \\ f=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 22x2 < 43 + 2x1 + 1x2 \\ GH = 47 - 44 = 3 \end{array}$$

En principio la estructura es hiperestatica de grado 3.

La observación de la estructura nos permite afirmar, dado su triangulación, que no existe ninguna barra critica, ni un defecto de barras en una determinada zona por lo que podemos afirmar su estabilidad interna sobrada.

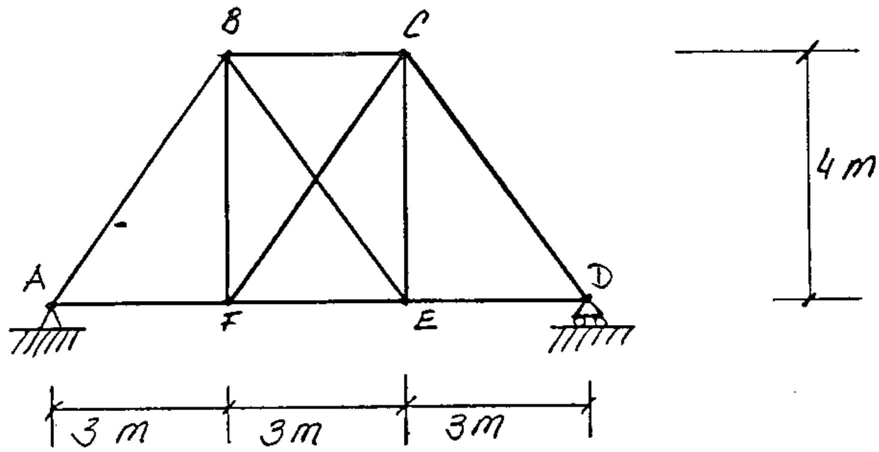
fig 5 $\begin{cases} \text{EXTERNA : Estable, Hiperestatica de Grado 1} \\ \text{INTERNA : Estable, Hiperestatica de Grado 2} \end{cases}$

PROBLEMA ~.-Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura cuandola barra $\overline{BE}$ sufre un aumento de temperatura de 20 ºC.

DATOS: Para todas las barras $E = 2*10^6$ kg/cm^2

$L/A = 2$ m/cm^2

$\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}



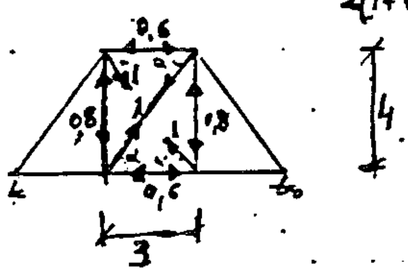
Barra	L/A	F_i	F_i^2	$\frac{L}{A}F_i^2$	F_R
AB	2	0		0	
BC	2	-0,6	0,36	2·0,36	150
CD	2	0			
DE	2	0			
EF	2	-0,6	0,36	2·0,36	150
FA	2	0			
BF	2	-0,8	0,64	2·0,64	200
CE	2	-0,8	0,64	2x0,64	200
CF	2	1		2	-250
BE	2	-			-250
				2(1+2)=6	

Sen α = 0,8

Cos α = 0,6

$\alpha L \Delta T$

$$\frac{6 N_{BE}}{2\times10^6} + \frac{2 N_{BE}}{2\times10^6} + 10^{-5}\times5\times20 = 0$$

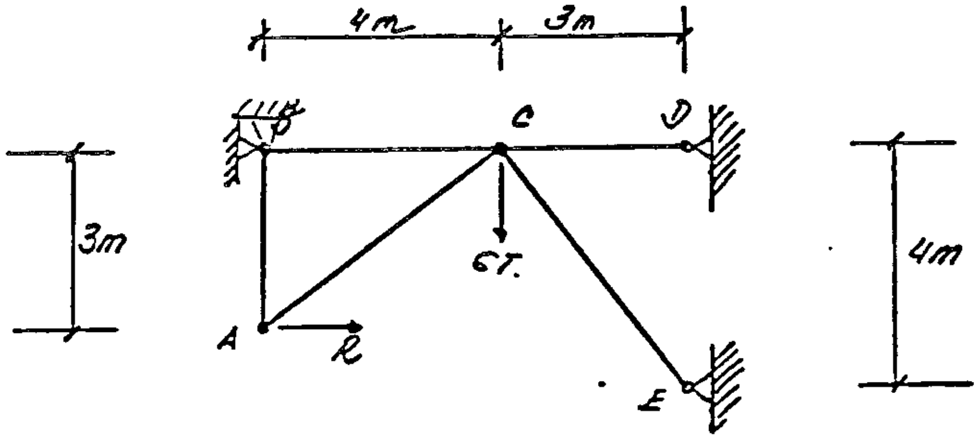


$$\frac{8 N_{BE}}{2\times10^6} = -10^{-5}\times100$$

$$N_{BE} = -\frac{2\times10^6\times10^{-5}\times100}{8} = -250 \text{ Kg}$$

PROBLEMA _ .- Calcular el valor de la fuerza R, aplicada horizontalmente en el nudo A de la estructura representada en la figura, de forma que el desplazamiento horizontal de dicho nudo A sea cero. Así mismo, obtener el desplazamiento vertical en ese mismo nudo A.

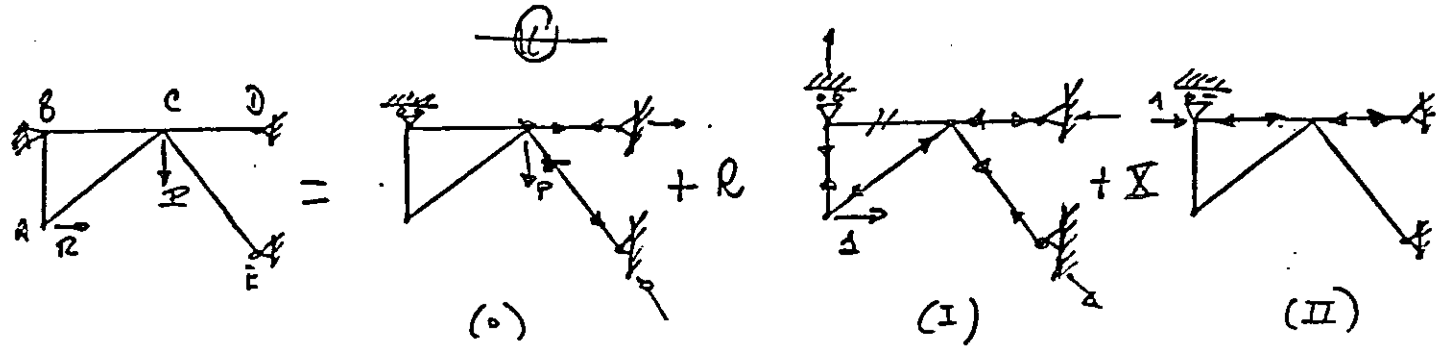
Datos: Barras AB y CD, Area = 15 cm^2
Barra BC , Area = 20 cm^2
Barras AC y CE, Area = 25 cm^2
Para todas las barras E = 2 * 10^6 kg/cm^2



Grado de hiperestaticidad:

$$\left.\begin{array}{l} b=5 \\ n=5 \\ c=6 \end{array}\right\} \quad 5+6-10=1$$

Por tanto es HIPERESTÁTICA DE GRADO 1.



BARRA	$N_i^{(0)}$	$N_i^{(R)}$	$N_i^{(II)}$	l_i/EA_i	$N^I + N^{II}R + N^{III}X$
AB	0	3/4	0	10^{-5}	
AC	0	$-5/\cancel{3}\,4$	0	10^{-5}	
BC	0	0	-1	10^{-5}	
CD	$+4{,}5\times10^3$	$-25/16$	-1	10^{-5}	
CE	-7.5×10^3	$+15/16$	0	10^{-5}	

$$h_A = 0 = \sum \left(N_i^{(0)} + R\,N_i^{(R)} + X\,N_i^{(II)}\right)\left(N_i^{I}\frac{l_i}{EA_i}\right)$$
$$h_B = 0 = \sum \left(N_i^{(0)} + R\,N_i^{(R)} + X\left(N_i^{II}\right)\right)\left(N_i^{II}\frac{l_i}{EA_i}\right)$$

$$10^{-5}\left[-4.5\times10^3\,\frac{25}{16} - 7.5\times10^3\,\frac{15}{16} + R\left(\cancel{6.66}\ 5.4453\right) + X\,\frac{25}{16}\right]=0$$

$$10^{-5}\left[-4.5\times10^3 \qquad + R\,(25/16) + X\ 2\right]=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{6.66}\ 5.4453\,R + 25/16\ X = 14062.5 \\ 25/16\ R + 2\ X = 4500 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R = \cancel{1939}\ 2496.54\ \text{K} \\ X = \cancel{735}.14\ \text{K} \quad 299.58 \end{array}}$$

$$V_A = \sum\left[N_{AB}^{(0)} + R\,N_{AB}^{(R)} + X\,N_{AB}^{II}\right] 1\times10^{-5} = \left(0 + R\times\frac{3}{4} + 0\cdot X\right)\times10^{-5} = \cancel{0.0145}\ 0.0187$$

(0) $\sum F_V = 0 \Rightarrow R_E \frac{4}{5} = 6000 \Rightarrow R_E = \frac{30 \times 10^3}{4} = 7{,}5 \times 10^3$

$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_E \frac{3}{5} = N_D \Rightarrow N_D = \frac{3}{5} \times 7{,}5 \times 10^3 = 4{,}5 \times 10^3$

(I) $\sum M_C = 0 \Rightarrow V_B \times 4 = 1 \times 3 \Rightarrow V_B = \frac{3}{4}$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_E \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow R_E = \frac{15}{16}$

$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_D = 1 + \frac{15}{16} \times \frac{3}{5} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

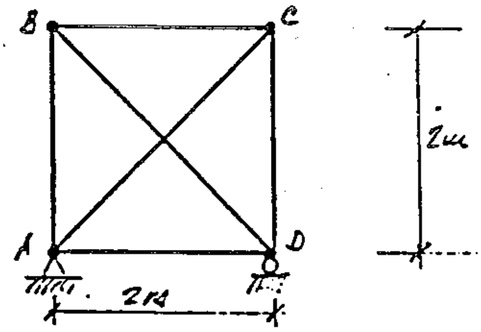
$N_{AC} \times \frac{3}{5} = 1 \Rightarrow N_{AC} = 5/3$

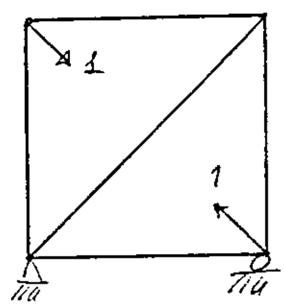
PROBLEMA . Calcular el desplazamiento horizontal del nudo B y los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura ,si la barra $\overline{AB}$ sufre un aumento de temperatura de 20 ºC.

Datos: $E = 2.1\times10^{6}$ kg/cm^{2}

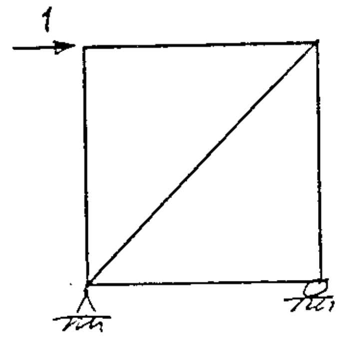
$A = 25$ cm^{2}

$\alpha = 1.2\times10^{-5}$ ºC^{-1}





(I)



(II)

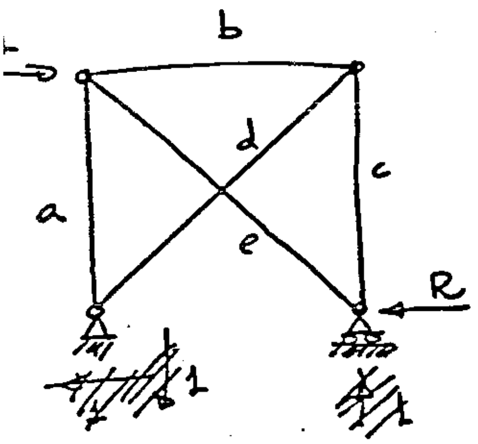
BARRA	LONG	F_i^{I}	F_i^{II}	F_i^{R}
CD	L	-1	-1	$-x$
AD	L	-1	0	$-x$
AC	$L\sqrt2$	$\sqrt2$	$\sqrt2$	$\sqrt2\,x$
AB	L	-1	0	$-x$
BC	L	-1	-1	$-x$
BD	$L\sqrt2$	$\sqrt2$	0	$\sqrt2\,x$

$$\sum_{Barras} N_i^{virt(I)}\delta^R = 4(1+\sqrt2)\,x\,\frac{L}{EA} + \alpha\,L\,\Delta t\,(-1) = 0$$

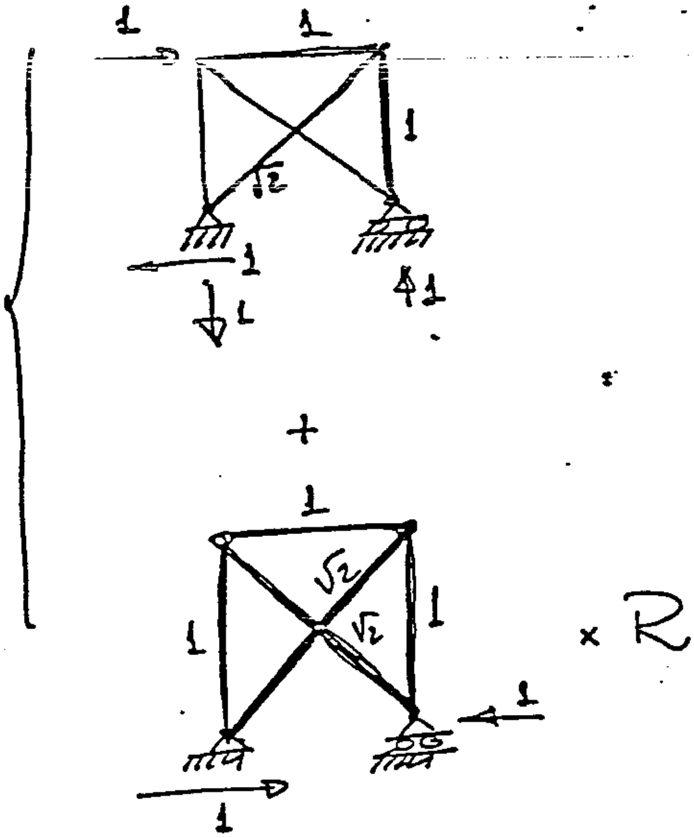
$$4(1+\sqrt2)\,x = AE\,\alpha\,\Delta t = 25\times2.1\times10^{6}\times1.2\times10^{-5}\times20$$

$$x = 1304.773$$

$$1\times u_B = \sum_{Barras} N^{virt(II)}\delta^R = (x+2\sqrt2\,x+x)\frac{L}{AE} = (2+2\sqrt2)\,1304.77\,\frac{200}{25\times2.1\times10^{6}} = \underline{\underline{0{,}0240}}$$



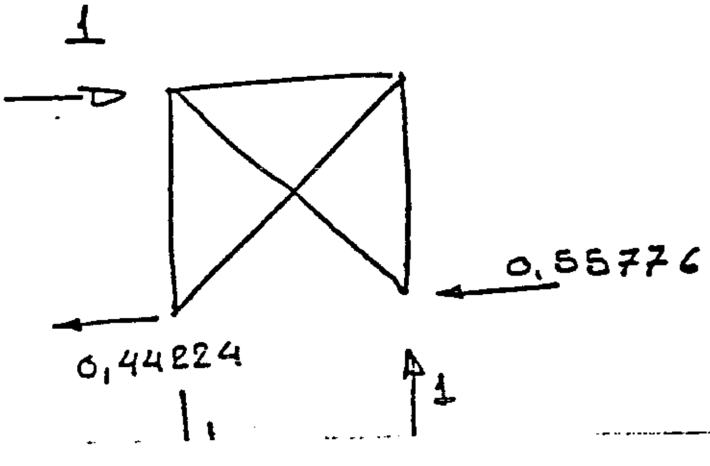
=



barra	N_{real}	ΔL_{real}	$N_{virtual}$	$N_v \cdot \Delta l_R$
a	R	$R\,\frac{l}{\Delta E}$	1	$R\,\frac{l}{\Delta E}$
b	$-1+R$	$(-1+R)\frac{l}{\Delta E}$	1	$(-1+R)\,\frac{l}{\Delta E}$
c	$-1+R$	$(-1+R)\frac{l}{\Delta E}$	1	$(-1+R)\,\frac{l}{\Delta E}$
d	$\sqrt{2}(1-R)$	$\sqrt{2}(1-R)\frac{\sqrt{2}\,l}{\Delta E}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}(R-1)\,\frac{l}{\Delta E}$
e	$-\sqrt{2}R$	$-\sqrt{2}R\,\frac{\sqrt{2}\,l}{\Delta E}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}\,R\,\frac{l}{\Delta E}$

$$\sum_b N_v\,\Delta l^R = \boxed{8{,}66R - 4{,}83}$$

$$\boxed{R = \frac{4{,}83}{8{,}66} = 0{,}56}$$

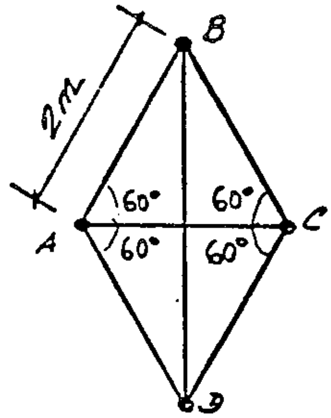


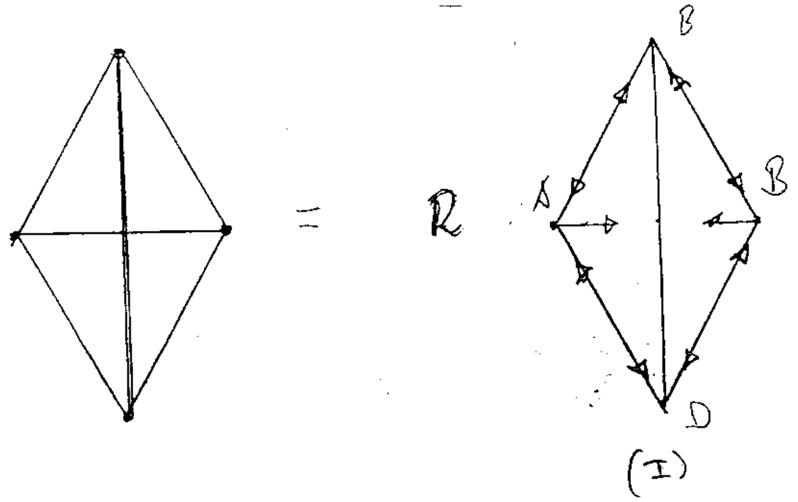
PROBLEMA ∠.- Calcular el corrimiento relativo entre los nudos A y C de la estructura de la figura, si la barra AB sufre un aumento de temperatura de 60 ºC, la barra BD es 0.5 cm mas corta de lo proyectado y la barra AC es 0.4 cm mas larga de lo proyectado.

Datos: - Barras AB, BC, CD y DA, sección A = 10.cm²
- Barra AC, sección A = 20.cm²
- Barra BD, sección A = 15. cm²

$E = 2\times10^6\ Kg/cm^2$

$\alpha = 10^{-5}\ ºC^{-1}$





$\Delta l = \alpha\, l\, \Delta T =$
$= 10^{-5} \times 2 \times 60 =$
$= 12 \times 10^{-4}\ m$

BARRA	N_i^I	l_i	$\frac{l_i}{EA_i}\left(\frac{m}{T}\right)$	$\lambda_i\,(m)$	$\delta_R = \frac{R N_i l_i}{EA_i}$	$N_i^I(\delta_R + \lambda_i)$
AB	-1	2	10^{-4}	$12\times10^{-4}\ m$	$-10^{-4}R$	$-10^{-4}(12-R)$
AC	$+1$	2	$0.5\ 10^{-4}$	$40\times10^{-4}\ m$	$0.5\ 10^{-4}R$	$10^{-4}(40+0.5R)$
AD	-1	2	10^{-4}	0	$-10^{-4}R$	$10^{-4}R$
B-C	-1	2	10^{-4}	0	$-10^{-4}R$	$10^{-4}R$
B-D	$+\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}10^{-4}$	$-50\times10^{-4}\ m$	$2\ 10^{-4}R$	$10^{-4}(-50\sqrt{3}+2R$
C-D	-1	2	10^{-4}	0	$-10^{-4}R$	$10^{-4}R$

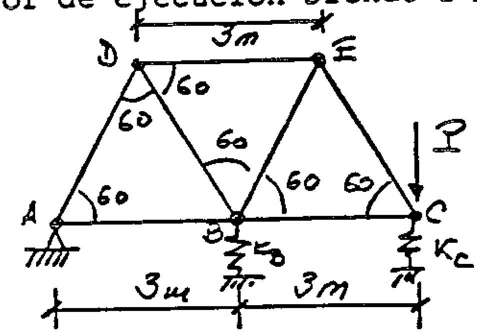
$$\Sigma = 10^{-4}\left[(28-50\sqrt{3}) + R(4.5+2\sqrt{3})\right] =$$

$$\boxed{R = 7.35\,T}$$

El corrimiento relativo entre A y C se obtiene sust. directamente

$$\boxed{\delta_{AC} = 10^{-4}(40+0.5R) = 0.43675\ cm}$$

PROBLEMA .- Calcular el valor de la carga P que actúa verticalmente sobre el nudo C de la estructura de la figura, para que dicho nudo descienda 5 mm. Además de dicha carga, la barra DE sufre un aumento de temperatura de 50ºC y la DB tiene un error de ejecución siendo 1 mm mas corta de lo debido.



Datos: Para todas las barras

$E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2

$A = 10$ cm^2

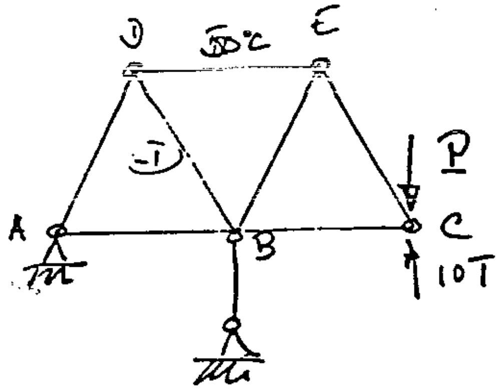
$\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}

Constantes elásticas de los resortes:

sobre nudo B: $k_B = 500$ t/m

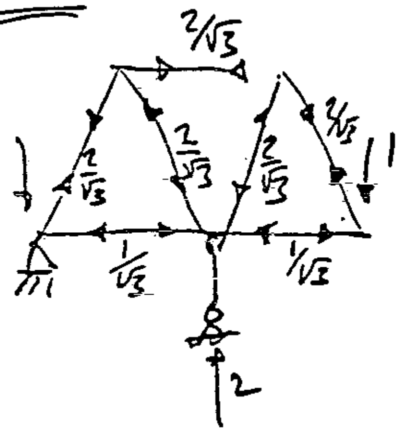
sobre nudo C: $k_c = 2000$ t/m

2de



- Se sustituye el muelle sobre B por una barra $\frac{l}{E\Omega} = 2 \times 10^{3}$ T/m.
- Se sustituye el muelle sobre C directamente por una carga ya que se sabe que el movimiento de C es 5mm hacia abajo $P_c = K\delta = 5 \times 10^{-3} \times m \times 2000 \frac{T}{m} = 10T$

ESTADO I:

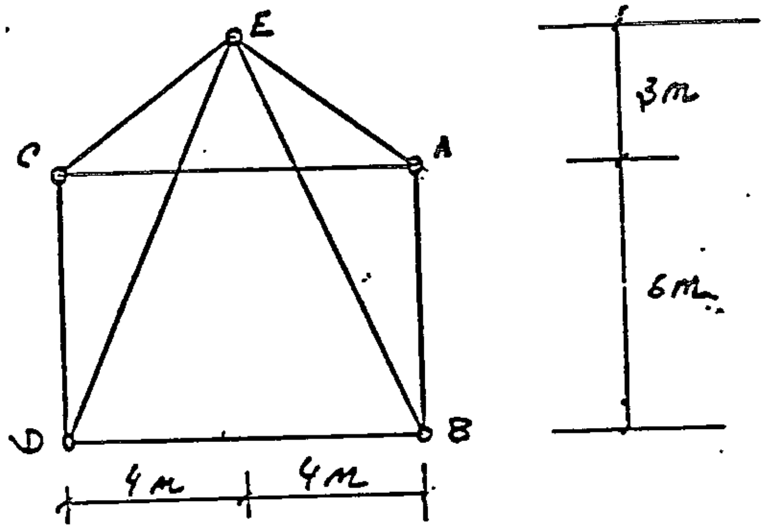


$$\downarrow V_c = 5 \times 10^{-3} = \sum \left\{ N^{I} (P-10) \frac{l}{E\Omega} \right] N^{I} + \frac{2}{\sqrt{3}} 10^{-3} + \frac{2}{\sqrt{3}} 10^{-5} \cdot 3 \cdot 50$$

$$\boxed{P = 10.232\ T}$$

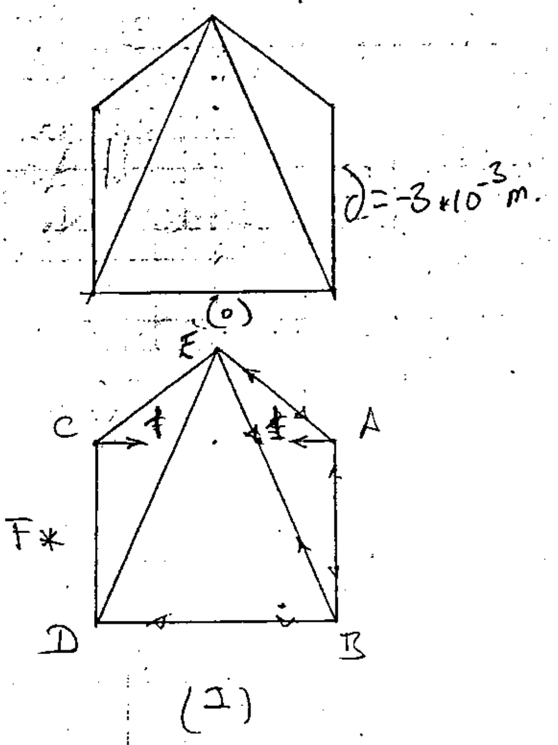
PROBLEMA .- Calcular el esfuerzo axil en la barra $\overline{AC}$ de la estructura representada en la figura, así como el movimiento relativo etre los nudos E y B de la misma, si la barra $\overline{AB}$ es 3 mm mas corta de lo debido.

Para todas las barras $L/(E*A) = 10^{-4}$ m/T



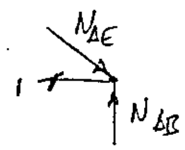
$$\left.\begin{array}{l} b=8 \\ n=5 \end{array}\right\} \quad 2*5=10<8+3=11$$

mínimo con el que hay que contar siempre (en este caso está en equilibrio y no hará falta)



$N_T^T=(N_T^0+FN^I)$

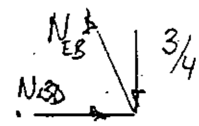
Nudo A:



$N_{AE}\,\frac{4}{5}=1 \Rightarrow N_{AE}=\frac{5}{4}$ (compr.)

$N_{AB}=N_{AE}*\frac{3}{5}=\frac{5}{4}*\frac{3}{5}=\frac{3}{4}$ (compr.)

Nodo B



$l_{EB}=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$

$N_{EB}*\frac{9}{\sqrt{97}}=\frac{3}{4} \Rightarrow N_{EB}=\frac{\sqrt{97}}{12}$ (Tracción

$N_{BD}=N_{EB}\,\frac{4}{\sqrt{97}}=\frac{\sqrt{97}}{12}\,\frac{4}{\sqrt{97}}=\frac{1}{3}$ (Compr.)

Por simetría:

$N_{CE}=N_{EA}=\frac{5}{4}$ (compr.)

$N_{CD}=N_{AB}=\frac{3}{4}$ (compr.)

$N_{ED}=N_{EB}=\frac{\sqrt{97}}{12}$ (Tracción)

Castigliano:

$$-F\frac{l}{EA_{CA}}=\sum \Delta l^T N^I=\sum\left[(N_T^0+FN^I)\frac{l}{EA}+\delta\right]N^I=\sum F(N^I)^2\frac{l}{EA}+\delta N^I_{AB}=$$

$$2\left(\frac{5}{4}\right)^2+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{97}}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-3*10^{-3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=F\,5{,}7083*10^{-4}+\frac{9}{4}*10^{-3}=-F\,10^{-4}$$

$$F=-\frac{9}{4}10^{-3}\,\frac{1}{6{,}7083*10^{-4}}=\underline{\underline{-3{,}354\ T}}$$

Compresión

2°) $\Delta l_{EB}=(-3{,}354)\,\frac{\sqrt{97}}{12}*\overset{=10^{-4}}{\frac{l}{EA}}=-2{,}753*10^{-4}$ m

(se aproximan)

PROBLEMA [illegible].- Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura, cuando el nudo 5 sufre un descenso de 0.5 cm y simultaneamente se produce un aumento de temperatura de 50 ºC.

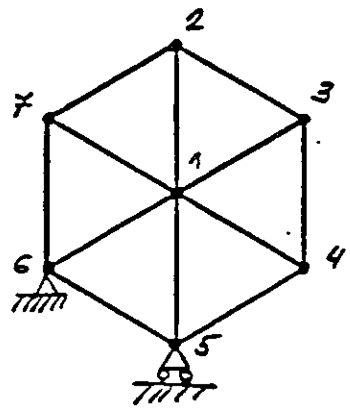
Para todas las barras:

La longitud es L = 1. m

El area A = 5. cm^2

El módulo de elasticidad $E = 2 * 10^6$ kg/cm^2

El coeficiente de dilatación $\alpha = 10^{-5}$ $ºC^{-1}$



Grado de hiperestaticidad:

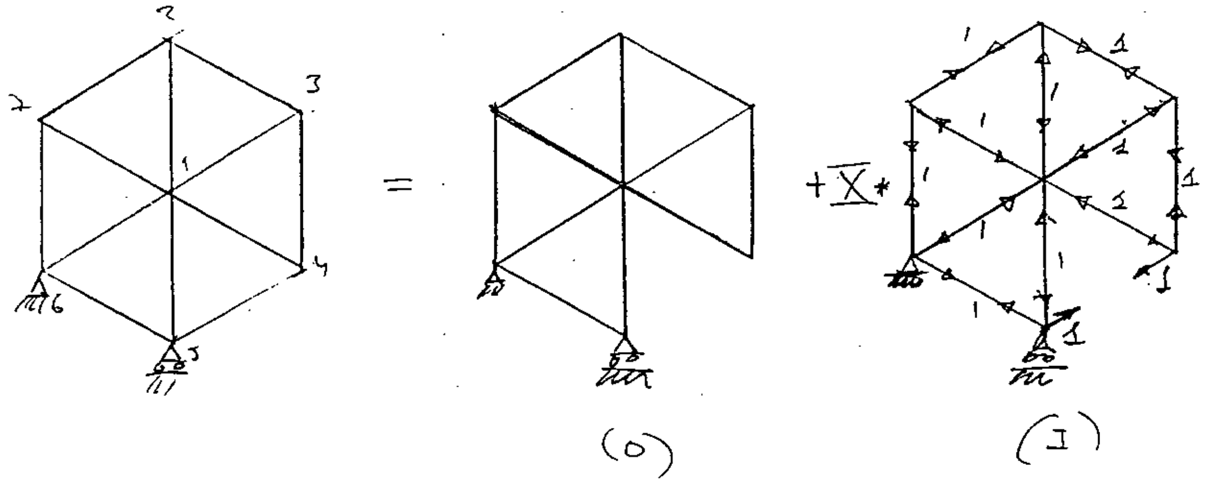
$n = 7$
$b = 12$
$R_V = 2$
$R_H = 1$

$GH = 12 + 1 + 2 - 2 \times 7 = 1 \Rightarrow$ HIPERESTÁTICA DE GRADO 1.

DESCENSO NUDO 5: Únicamente produce un movimiento en la estructura como sólido rígido de giro alrededor del nudo 6. Por tanto NO PRODUCE NINGÚN ESFUERZO EN LAS BARRAS

$\Delta l = \alpha \, l \, \Delta T = 10^{-5} \times 100 \times 50 = \underline{5 \times 10^{-2}\ cm}$

$\frac{1}{EA} = \frac{1}{5 \times 2 \times 10^{6}} = 10^{-7}\ Kg^{-1}$



Barra	$N_i^{(I)}$	λ	$N_i^{(0)}$	l_i/EA_i $\left(\frac{cm}{Kg}\right)$	$N_i^{0} + X N_i^{(I)}$
1-2	-1	0	0	10^{-5}	+ 416.66
1-3	-1	0	0	10^{-5}	
1-4	-1	0	0	10^{-5}	
1-5	-1	0	0	10^{-5}	
1-6	-1	0	0	10^{-5}	
1-7	-1	0	0	10^{-5}	+ 416.66
2-3	1	0	0	10^{-5}	- 416.66
2-7	1	0	0	10^{-5}	
3-4	1	0	0	10^{-5}	
4-5	1	5×10^{-2}	0	10^{-5}	
5-6	1	0	0	10^{-5}	
6-7	1	0	0	10^{-5}	-416.66

$$\sum_{Nud} (N^F h^R + V^F \delta^R) = \sum_{barr} N^F \Delta l^R = \sum_i N_i^{(I)} \left[\frac{l_i}{EA_i} (N_i^{(0)} + X N_i^{(I)}) + \lambda \right] = \sum_i \left[X \frac{l_i}{EA_i} (N_i^{I})^2 + N_i^{I} \lambda \right]$$

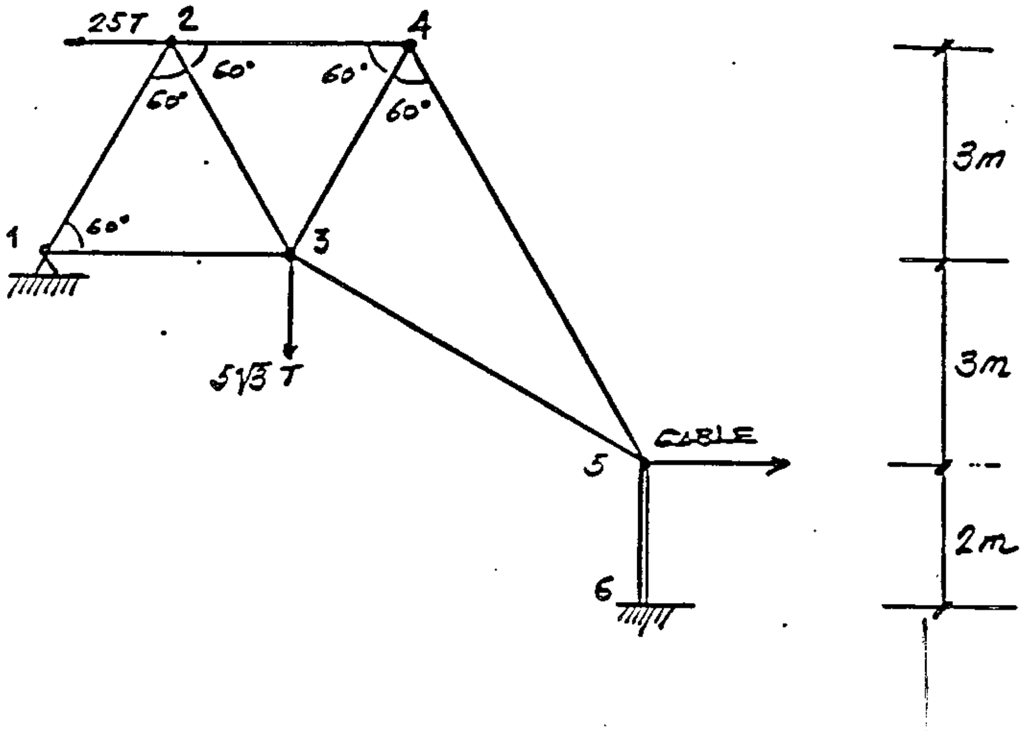
$$X \; 12 \times 10^{-5} + 5 \times 10^{-2} = 0$$

$$\boxed{X = -\frac{5 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-5}} = 416.66}$$

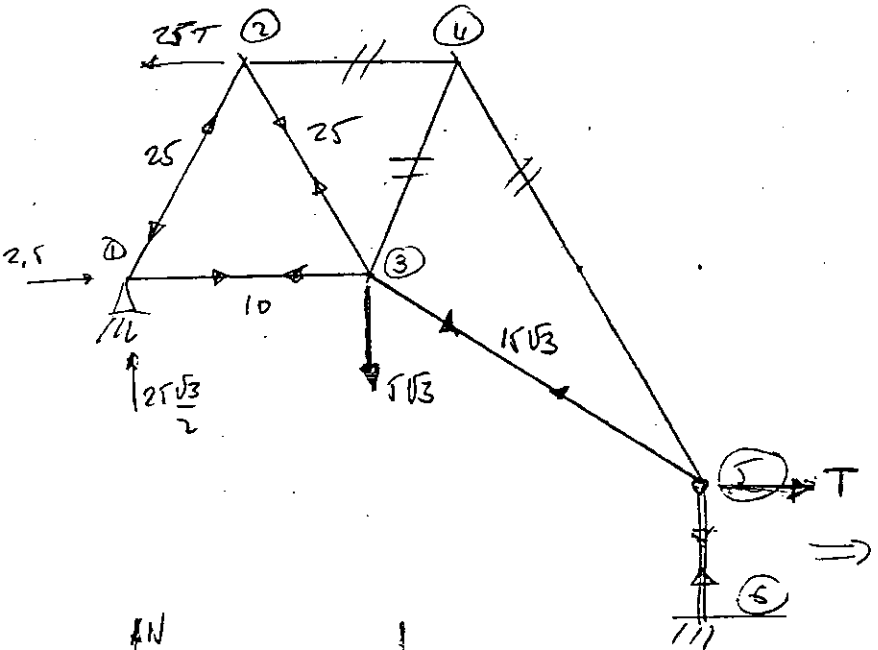
PROBLEMA . .- Con objeto de reparar la barra 3-4 de la estructura de la figura es preciso dejarla con tensión nula, para lo que se amarra un cable en la parte superior del pilar 5-6 y se tira de él hasta que la citada barra no trabaje.

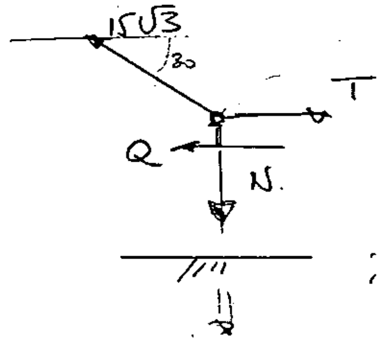
Si además de las cargas indicadas en la figura, la barra 2-4 sufre un aumento de temperatura de $5\sqrt{3}$ ºC, calcular en estas condiciones, el esfuerzo en el cable y los movimientos del nudo 5.

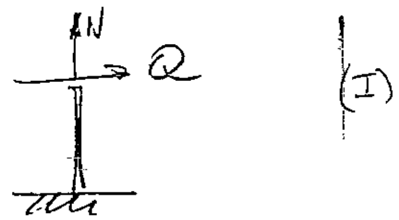
Datos:
- Barras 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-4 y 4-5: $EA = \sqrt{3}\ 10^5$ T
- Barra 3-5 : $EA = 3\ 10^5$ T
- Barra 5-6 : $EA = \sqrt{3}\ 10^5$ T; $EI = 4000.\ m^2T$
  $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}



Al aplicar la carga al cable y que no trabaje la barra 3-4, el equilibrio en el nudo 4 indica que tampoco trabajan las 2-4 y la 4-5 por lo que es elemental calcular los esfuerzos :







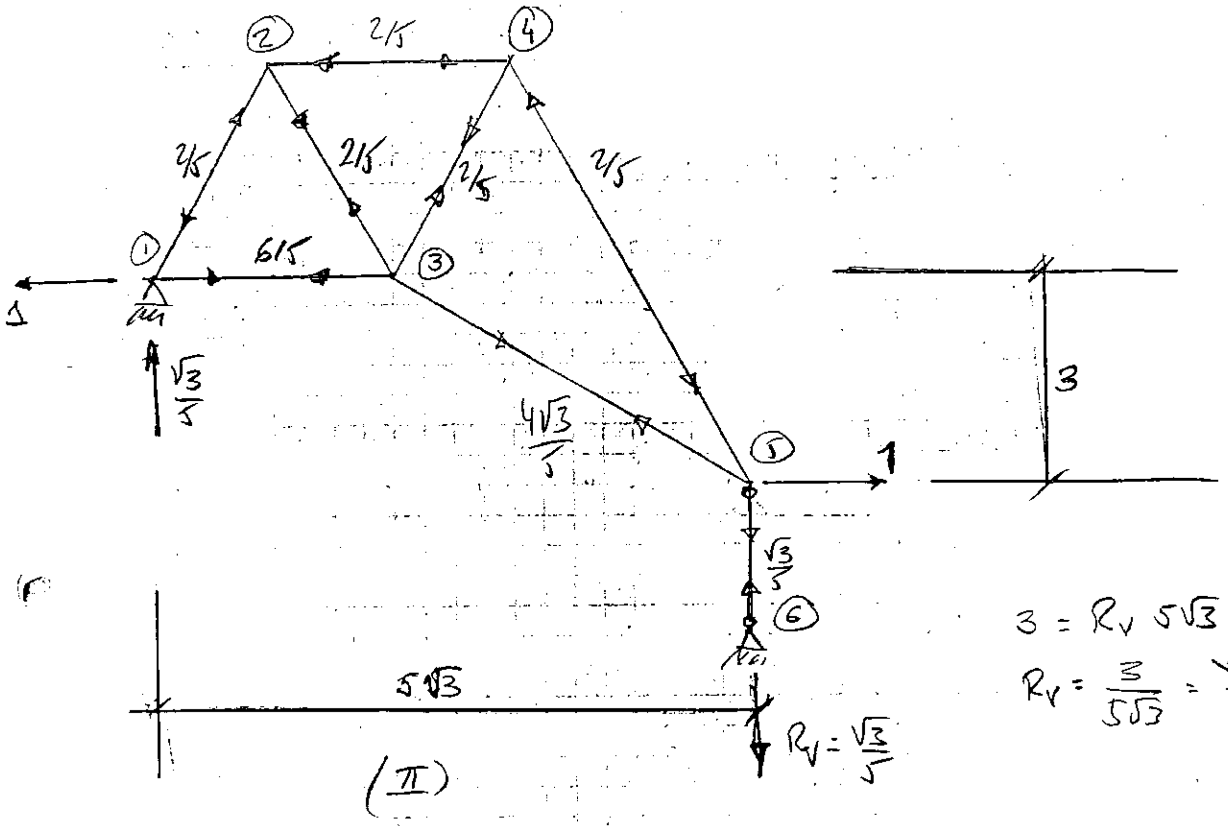
$$15\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + Q = T \qquad T = Q + \frac{45}{2}$$

$$15\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = N \qquad N = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\delta_Y^{5} = \frac{Nl}{EA} = \frac{15\sqrt{3}}{2}\;\frac{2}{1{,}732\times 10^{5}} = 1{,}5\times 10^{-4}\,m}$$

$$\boxed{\delta_H^{5} = \frac{Q\,l^3}{3EI}}$$

que debe ser igual al de la estructura,



$3 = R_V\, 5\sqrt{3}$

$R_V = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

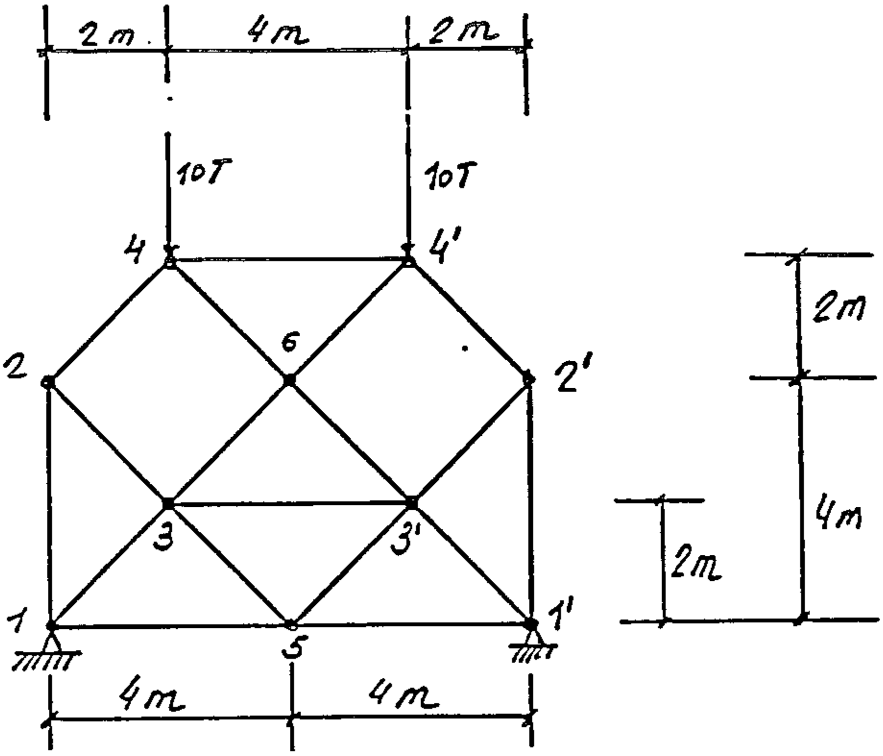
Barra	N_i^{I}	N_i^{II}	l_i	EA	δ
1-2	-25	$-2/5$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3} \times 10^5$	0
1-3	$+10$	$+6/5$	$2\sqrt{3}$	"	0
2-3	$+25$	$+2/5$	$2\sqrt{3}$	"	0
2-4	0	$-2/5$	$2\sqrt{3}$	"	3×10^{-4}
3-4	0	$+2/5$	$2\sqrt{3}$	"	0
3-5	$+15\sqrt{3}$	$+\frac{4\sqrt{3}}{5}$	6	$3\sqrt{3} \times 10^5$	0
4-5	0	$-2/5$	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{3} \times 10^5$	0
5-6	$+15\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{5}$	2	2×10^5	0

$$1 \cdot \delta_H^{5} = \sum \left(N_i^{I} \frac{l_i}{EA_i} + \delta \right) N_i^{II} = \sum N_i^{I} N_i^{II} \frac{l_i}{EA_i} + \delta N_i^{II} =$$

$$= 10^{-4} \left(14.05 - 3 \times \frac{2}{5} \right) = 12.85 \times 10^{-4}\, m = \frac{Q \times 2^3}{3 \times 4000}$$

$$Q = 1.93\, t \Rightarrow T = Q + \frac{45}{2} = 1.93 + \frac{45}{2} = \underline{24.43\, T}$$

PROBLEMA .-Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura, sabiendo que todas ellas tienen el mismo módulo de elasicidad $E=2*10^6$ kg/cm^2 y la misma sección $A=20$ cm^2.



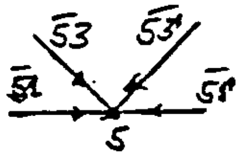
$n = 10$
$b = 18$
$f = 2$

$G_{hiperest.} = 18 + 2\cdot 2 - 10\cdot 2 = \underline{2}$

$\therefore$ Hiperestática de grado 2. $\begin{cases} 1 \text{ Interna} \\ 1 \text{ Externa} \end{cases}$

Simetría:

1.- Equilibrio del nudo 5:



Por simetría $\Rightarrow N_{\bar{51}} = N_{\bar{51'}}$

$N_{\bar{53}} = N_{\bar{53'}}$

Por equilibrio del nudo $\Rightarrow N_{53} = N_{53'} = 0$

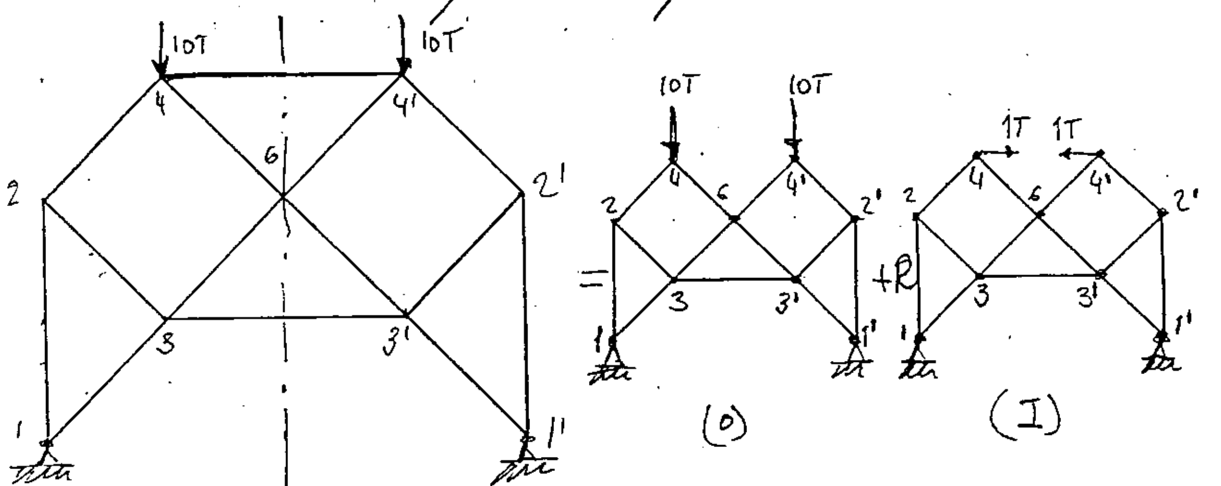
Por pequeñas deformaciones, como el movimiento de 5 es vertical

$N_{51} = N_{51'} = 0$

2: Equilibrio del nudo 6:

$$N_{63} = N_{63'} = N_{64} = N_{64'}$$

NOTA: A pesar de las simplificaciones indicadas, no se debe olvidar que la simetría introduce únicamente una condición y por tanto lo único que se produce es una reducción del grado de hiperestaticidad en una unidad.



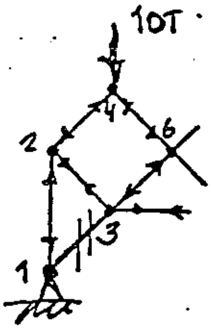
BARRA	N_i^0 (t)	N_i^I (t)	l/EA (m/t)	$10^4 \times \frac{l_i}{EA}(N_i^0 + R\,N_i^I) \times N_i^I$	$P(t) = N_i^0 + R N_i^I$
1-2	-10	1	10^{-4}	$-10 + R$	-6.893
1-3	0	-1.414	0.707×10^{-4}	$0 + 1.414R$	4.393
2-3	7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$-3.534 + 0.3534R$	4.873
2-4	-7.07	0.707	0.707×10^{-4}	$-3.534 + 0.3534R$	-4.873
3-6	-7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$3.534 + 0.3534R$	-9.267
3-3'	10	-1	10^{-4}	$-10 + R$	6.893
4-6	-7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$3.534 + 0.3534R$	-9.267
4-4'	0	1	10^{-4}	R	3.107
1'-2'	-10	1	10^{-4}	$-10 + R$	
1'-3'	0	-1.414	0.707×10^{-4}	$0 + 1.414R$	
2'-3'	7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$-3.534 + 0.3534R$	Fin.
2'-4'	-7.07	0.707	0.707×10^{-4}	$-3.534 + 0.3534R$	
3'-6'	-7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$3.534 + 0.3534R$	
4'-6	-7.07	-0.707	0.707×10^{-4}	$3.534 + 0.3534R$	

$$\sum_i \frac{l_i}{EA}\left(N_i^0 + R N_i^I\right) \cdot N_i^I = 0.$$

$$-30 + 9.6552 \cdot R = 0$$

$$R = 3.107$$

(0)



$2 \times N_{24} \times \text{sen}45 = 10 \Rightarrow N_{24} = -7.07\ t = N_{46} = N_{36}$

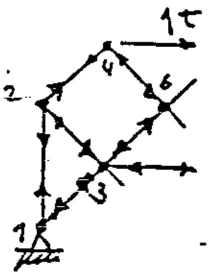
$N_{23} = 7.07$

$N_{12} = -2 \times 7.07 \times \text{sen}45 = -10T$

$N_{13} \times \text{sen}45 = 0 \Rightarrow N_{13} = 0$

$N_{33'} = 2 \times 7.07 \times \text{sen}45 = 10.$

(1)



$N_{24} = -N_{46}$

$N_{24} = \frac{1}{2} \times 1 \frac{1}{\text{sen}45} = 0.707$

$N_{46} = -0.707 = N_{36} = N_{23}$

$N_{12} = 2 \times 0.707 \times \text{sen}45 = 1\ t$

$N_{13} = -\frac{2 \times 0.707}{\text{sen}45} \text{sen}45 = -1.414\ t$

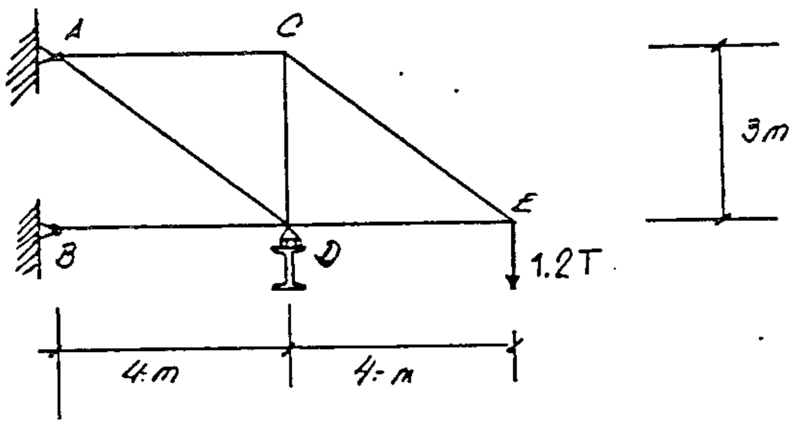
$N_{33'} = -\left[1.414 \times \text{sen}45 + \cancel{0.707 \times \text{sen}45} - \cancel{0.707\ \text{sen}45}\right] = -1.$

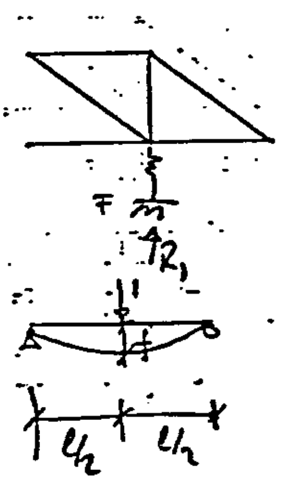
PROBLEMA .- La estructura ABCDE representada en la figura se apoya, además de en los puntos A y B, en el punto medio D de una viga simplemente apoyada. Calcular la reacción en D y el descenso de dicho punto. 41

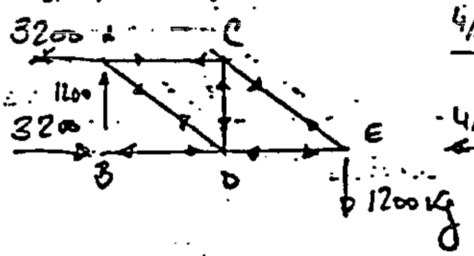
Datos: $E = 2*10^6$ kg/cm²

Para todas las barras de la celosía, el area de la sección transversal es 3.2 cm².

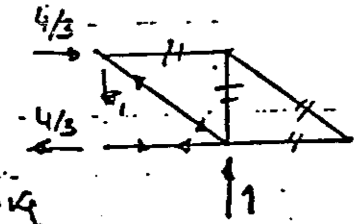
La viga sobre la que apoya la estructura tiene una longitud de 2 metros y una inercia de 320 cm⁴.







(I)



(II)

$$f = \frac{P \times L^3}{48EI} = \frac{1 \times 200^3}{48 \times 2 \times 10^6 \times 320} = \boxed{0.2604 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm/Kg}}$$

BARRA	N_I	N_{II}	L/EA (cm/Kg)
AC	1600.-	0	62.5×10^{-6}
AD	2000.-	$-5/3$	78.125×10^{-6}
CE	+2000.-	0	78.125×10^{-6}
CD	−1200.-	0	46.875×10^{-6}
BD	−3200.-	4/3	62.5×10^{-6}
DE	−1600.-	0	62.5×10^{-6}
DF	0	1	260.4×10^{-6}

$$= R_D \sum N_{II}^2 \frac{L}{EA} + \sum N_I N_{II} L/EA$$

$$\boxed{2000\left(-\frac{5}{3}\right) 78.125 \times 10^{-6} - 3200\left(\frac{4}{3}\right) 62.5 \times 10^{-6}}$$

$$\boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^2 78.125 \times 10^{-6} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 62.5 \times 10^{-6}}$$

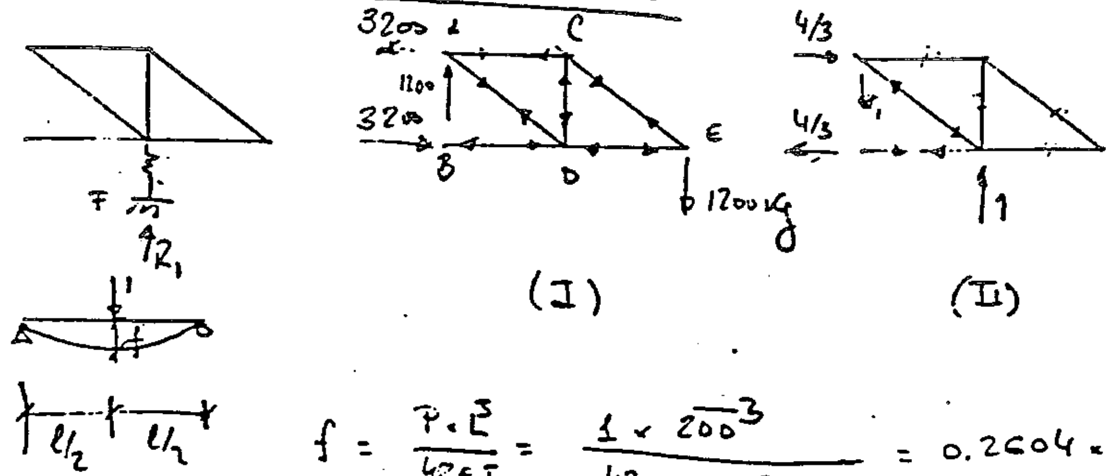
$$= 328.125\,10^{-6} R_I - 527083.33\ 10^{-6} = -R_D\ 0.2604 \times 10^{-3}$$

$$R_D = 895.6\ \mathrm{Kg}$$

descienda lo que la carga así;

$$f = R_D \frac{L^3}{48EI} = 1895.6 * 0.2604 \times 10^{-3} = \underline{\underline{0.233\ \mathrm{cm}}}$$

TAMBIEN SE PUEDE PLANTEAR



(I)

(II)

$$f = \frac{P \cdot L^3}{48EI} = \frac{1 \times 200^3}{48 \times 2 \times 10^6 \times 320} = 0.2604 \times 10^{-3}\ \text{cm/kg}$$

BARRA	N_I	N_{II}	L/EA (cm/kg)
AC	1600.-	0	62.5×10^{-6}
AD	2000.-	$-5/3$	78.125×10^{-6}
CE	+2000.-	0	78.125×10^{-6}
CD	−1200.-	0	46.875×10^{-6}
BD	−3200.-	4/3	62.5×10^{-6}
DE	−1600.-	0	62.5×10^{-6}
DF	0	1	260.4×10^{-6}

$$R_1 = -\frac{\sum N_I N_{II} L/EA}{\sum N_{II}^2 L/EA} = -\frac{2000\left(-\frac{5}{3}\right) \times 78.125 \times 10^{-6} - 3200\left(\frac{4}{3}\right) 62.5 \times 10^{-6}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 78.125 \times 10^{-6} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 62.5 \times 10^{-6} + (1)^2\, 260.4 \times 10^{-6}} =$$

$$= \frac{527083.33}{588.525} = \boxed{895.6\ \text{Kg}}$$

Y aceptando lo que la viga así:

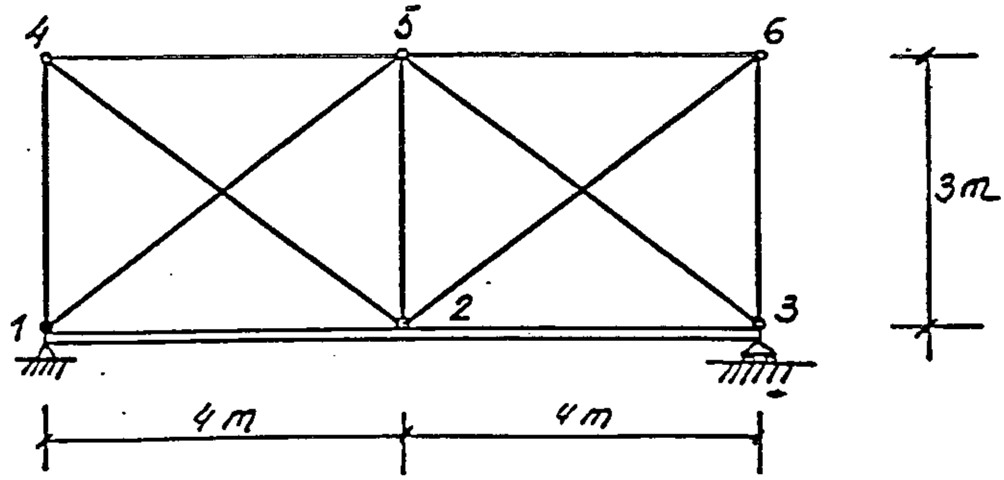
$$f = P\frac{L^3}{48EI} = 895.6 \times 0.2604 \times 10^{-3} = 0.233\ \text{cm}$$

PROBLEMA .-Calcular el movimiento relativo entre los nudos 1 y 5 de la estructura representada en la figura si las barras 2-4 y 2-6 sufren un aumento de temperatura de 40 ºC.

DATOS: Barra 1-2-3 inextensible con $EI = 5000.\ T\ m^2$

Para el resto de las barras $EA = 15000.\ T$

$\alpha = 10^{-5}\ ºC^{-1}$



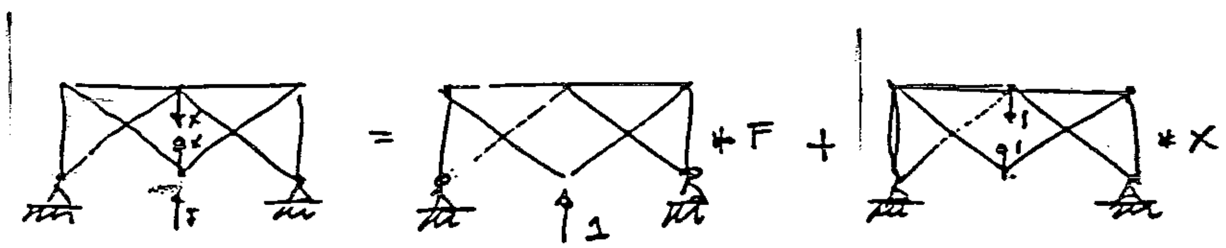
Se separa en dos partes y se impone la condición de compatibilidad (movimiento de 2 igual en las dos estructura.

Por simetría el nudo 2 se desplaza solo verticalmente.

ESTRUCTURA RETICULADA: $v_2 = \frac{F L^3}{48 EI} = \frac{F \cdot 8^3}{48 \cdot 5000}$

ESTRUCTURA ARTICULADA:

$b=9$, $n=6$, $c=4$ | $9-(2\cdot 6-4)=1$ hiperest.



BARRA	N_i^I	N_i^{II}
2-4	$-\frac{2.5}{3}$	$-\frac{2.5}{3}$
2-6	$-\frac{2.5}{3}$	$-\frac{2.5}{3}$
4-5	2/3	2/3
5-6	2/3	2/3
1-4	0.5	0.5
3-6	0.5	0.5
1-5	0	$-\frac{2.5}{3}$
3-5	0	$-\frac{2.5}{3}$

$$v_2^1 = \sum N_i N_i^I \left(\frac{L}{EA}\right)_i + \sum N_i^I (L\alpha\Delta t)_i =$$

$$= \sum \left(F N_i^I + X N_i^{II}\right) N_i^I \left(\frac{L}{EA}\right)_i + \sum N_i^I (L\alpha\Delta t)_i =$$

$$= \frac{F}{15000}\left[2\left(-\frac{2.5}{3}\right)^2 \cdot 5 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 4 + 2(0.5)^2 \cdot 3\right] +$$

$$+ \frac{X}{15000}\left[2\left(-\frac{2.5}{3}\right)^2 5 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 4 + 2(0.5)^2 \cdot 3\right] + 2\left(-\frac{2.5}{3}\right) 5 \cdot 10^{-5} \cdot 40 =$$

$$= \frac{F \cdot 8^3}{48 \cdot 5000}$$

$$\boxed{108\,X + 396\,F = 450}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{2-5} = \sum \left(F N_i^I + X N_i^{II}\right) N_i^{II} \left(\frac{L}{EA}\right)_i + \sum N_i^{II} (L\alpha\Delta t)_i =$$

$$= X \frac{L}{EA}$$

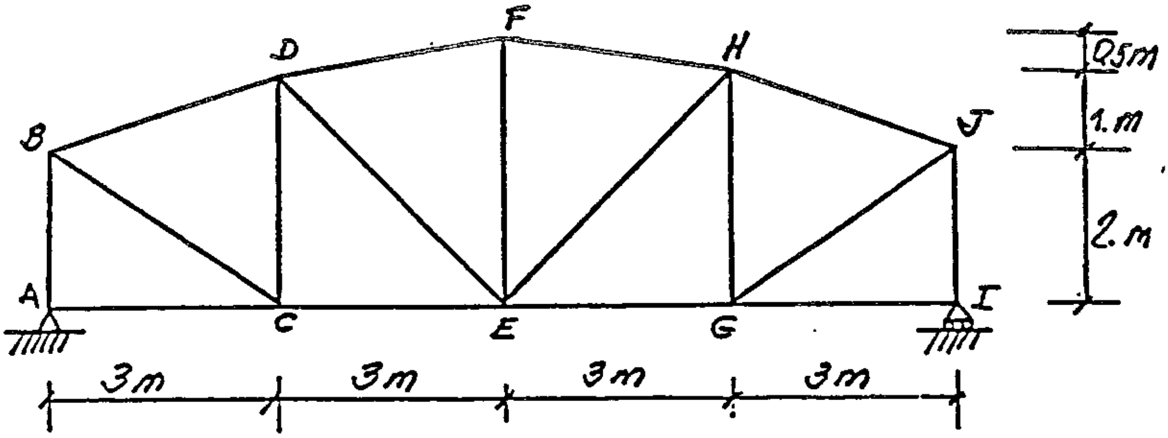
$$\boxed{197.5\,X + 108\,F = 450}$$

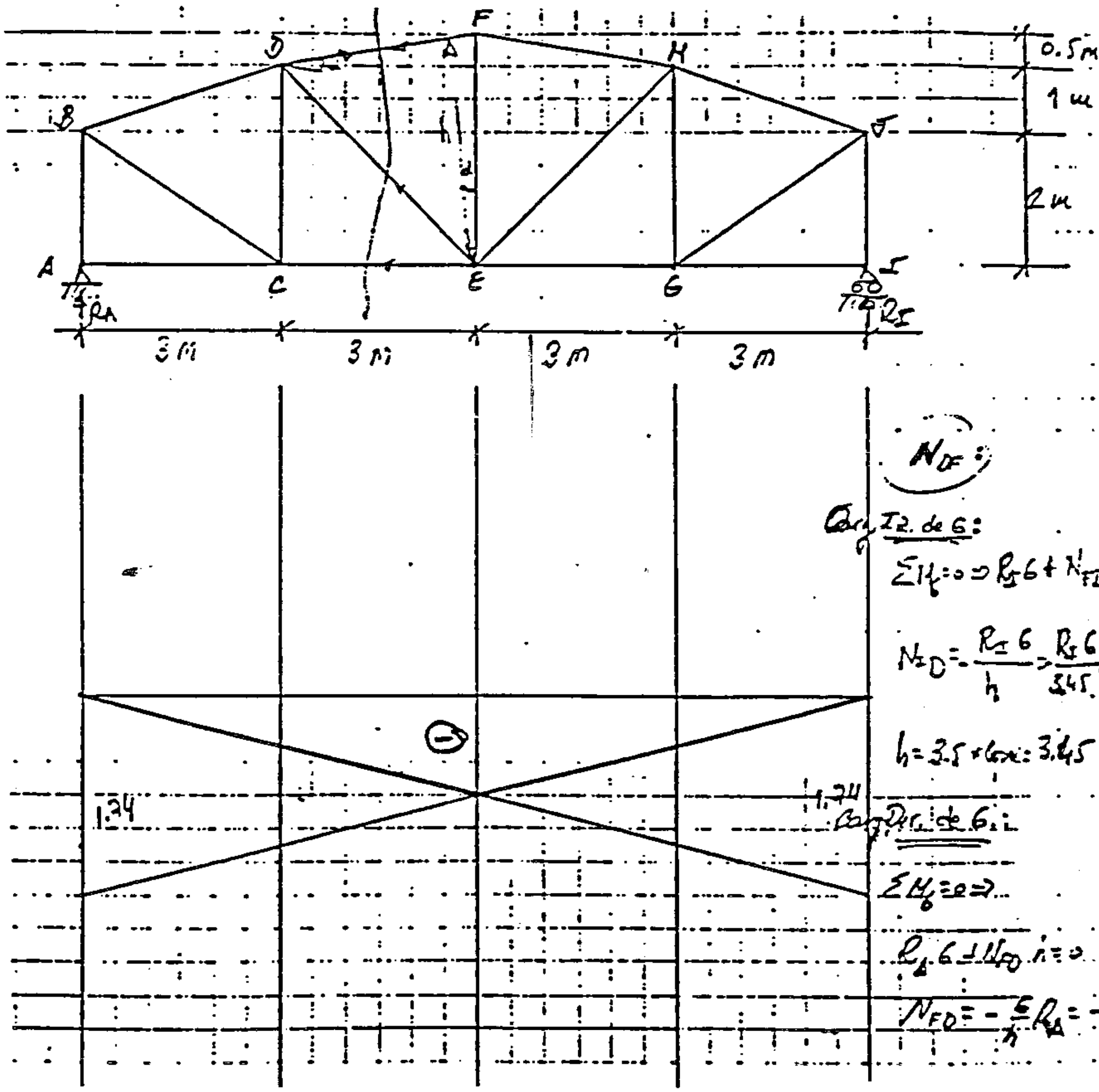
Resolviendo el sistema: $\boxed{\begin{array}{l} X = 1.947\ T \\ F = 0.605\ T \end{array}}$

$$N_{1-5} = F N_{1-5}^I + X N_{1-5}^{II} = 0.605(0) + 1.974\left(-\frac{2.5}{3}\right) = -1.623\,t$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_{1-5} = N_{1-5}\frac{L_{1-5}}{EA} = 1.623 \cdot \frac{5}{15000} = 5.41 \cdot 10^{-4}\ m}$$

PROBLEMA ... .-Calcular las lineas de influencia del esfuerzo axil en las barras DF y DE de la estructura representada en la figura cuando una carga vertical unidad recorre el cordón inferior.





N_{DF}:

Corte Izq. de G:

$\sum M_G = 0 \Rightarrow R_I 6 + N_{FD} h = 0$

$N_{FD} = -\frac{R_I 6}{h} \Rightarrow \frac{R_I 6}{3.45} = -1.74 R_I$

$h = 3.5 \cdot \cos\alpha = 3.45$

Corte Dcha. de G:

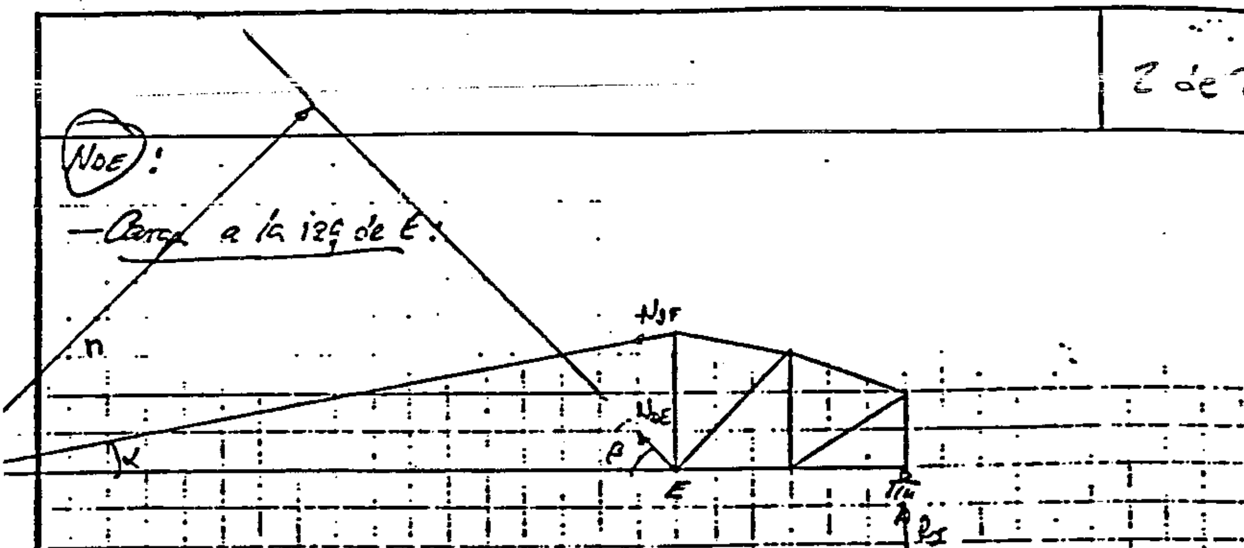
$\sum M_G = 0 \Rightarrow$

$R_A 6 + N_{FD} h = 0$

$N_{FD} = -\frac{6}{h} R_A = -1.74 R_A$

N_{DE}:

— Carga a la izq de E:



$\tan\alpha = \frac{0.5}{3} = \frac{3.5}{\overline{EK}} \Rightarrow \overline{EK} = \frac{3 \times 3.5}{0.5} = 21\,m$

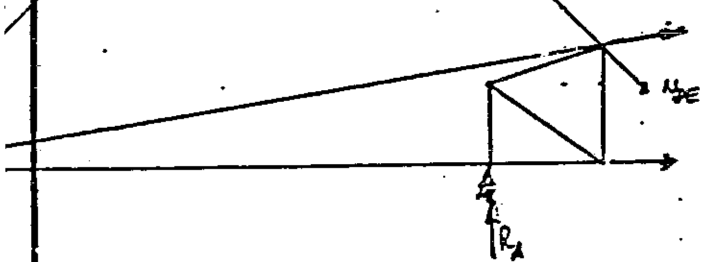
$h = \overline{EK}\,\text{sen}\,\beta = 14.85\,m$

$\Sigma M_K = 0$

$R_I \times 27 + N_{DE} \times 14.85 = 0$

$\boxed{N_{DE} = -1.82\,R_I}$

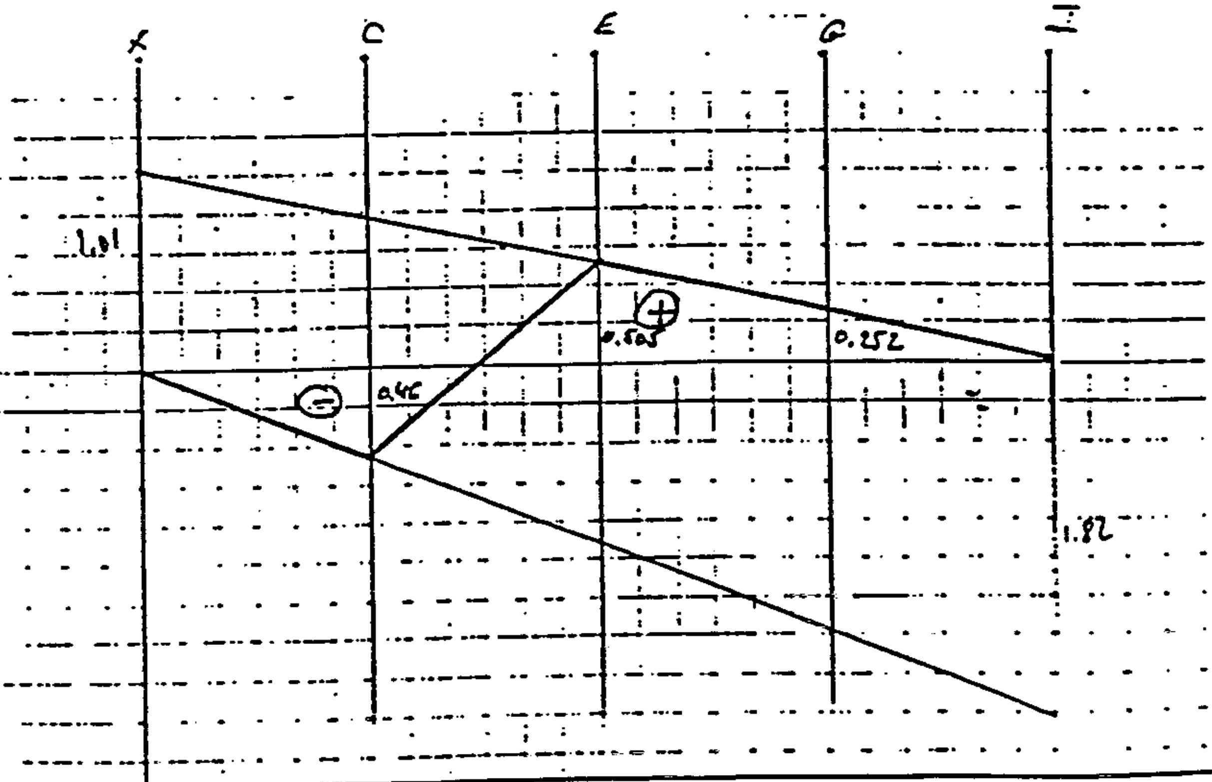
— Carga a la derecha de C:



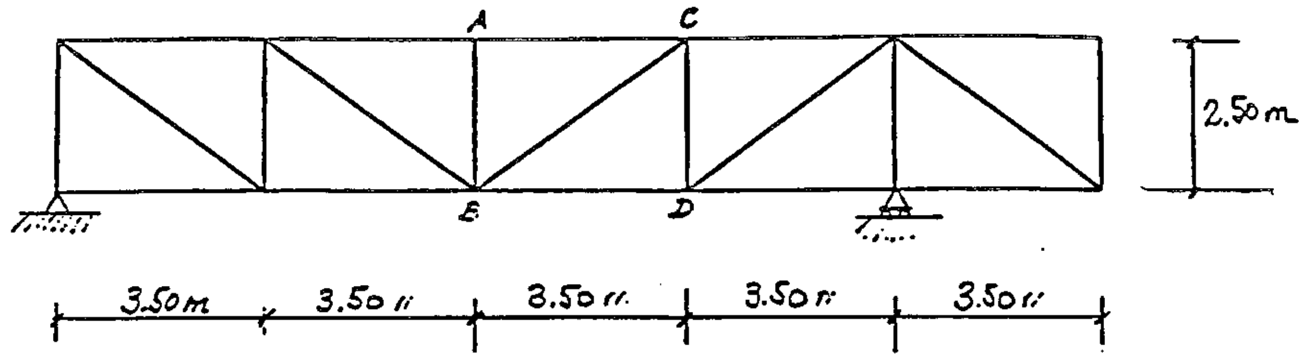
$\Sigma M_K = 0$

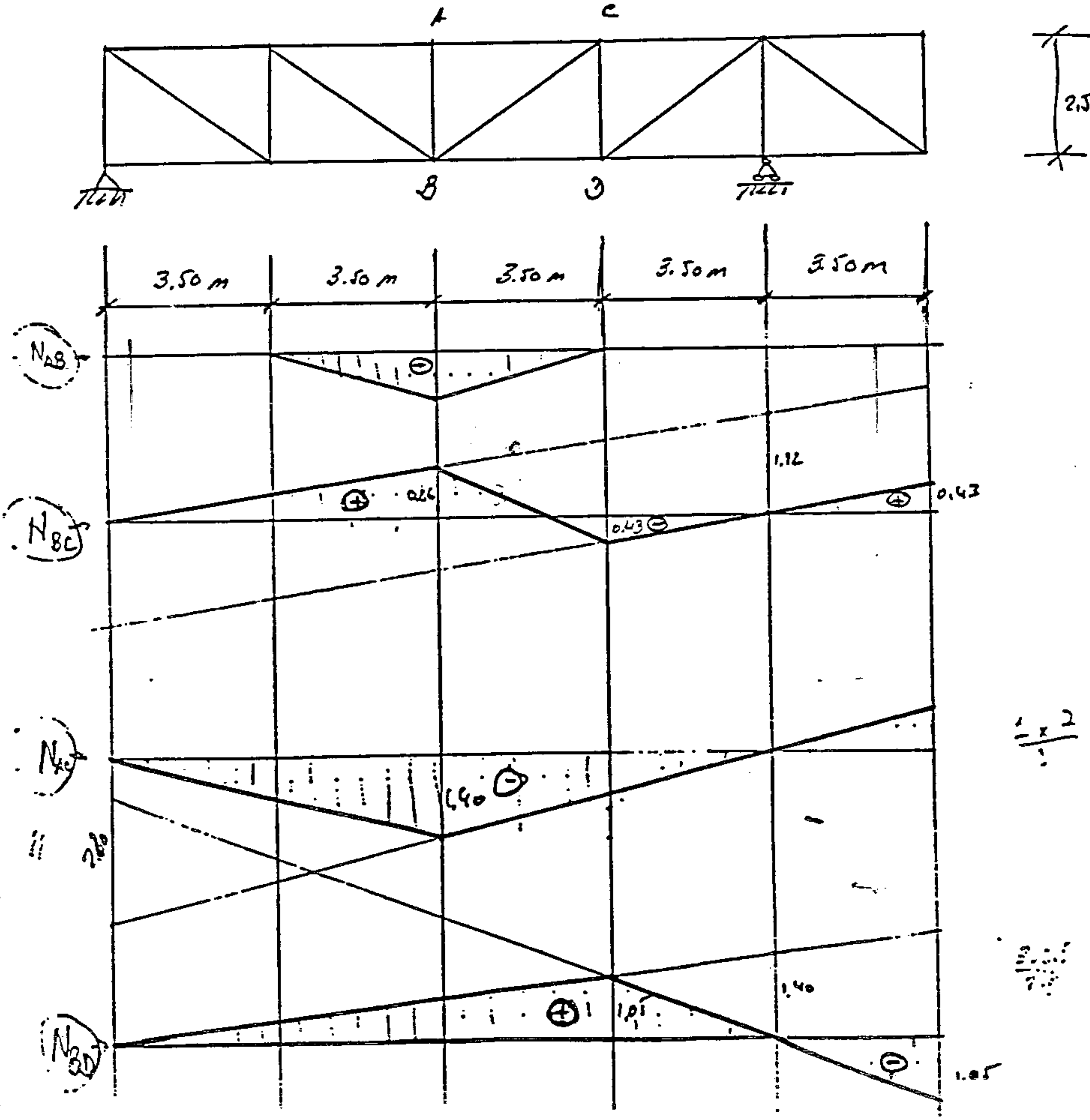
$R_A \times (21-6) = N_{DE} \times 14.85$

$N_{DE} = 1.01\,R_A$



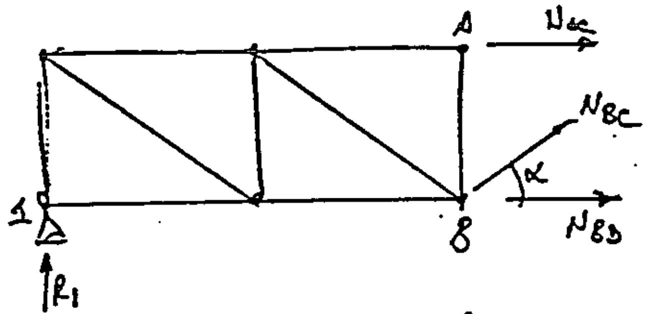
PROBLEMA ?.-Calcular las líneas de influencia del esfuerzo axil de las barras $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de la estructura representada en la figura cuando una carga unidad recorre el cordón superior.





L.I. N_{BC} :

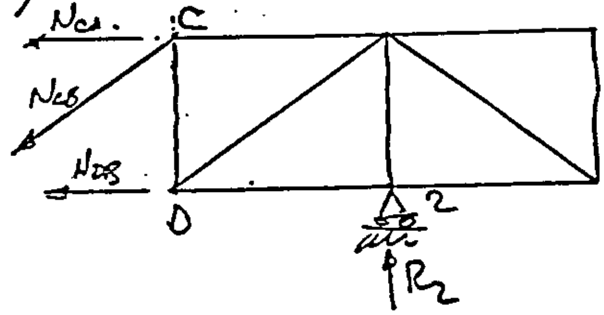
a) Fuerza unidad a la derecha de C:



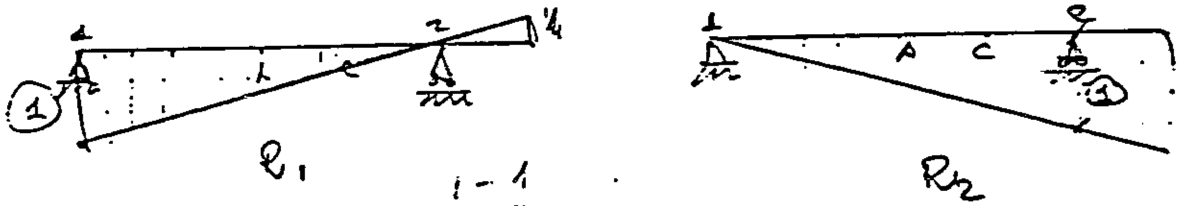
$\Sigma F_V = 0: \; N_{BC} \operatorname{sen} \alpha + R_1 = 0$

$$\boxed{N_{BC} = -\frac{R_1}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

b) Fuerza unidad a la izquierda de A



$\Sigma F_V = 0 \qquad N_{CB} = \frac{R_2}{\operatorname{sen}\alpha}$



L.I. N_{AC} y N_{BD} :

a) Fuerza unidad a la derecha de C: (Figura anterior)

$\Sigma M_B = 0. \qquad R_1 \times \overline{1B} + N_{AC} \times h = 0 \Rightarrow N_{AC} = -\frac{R_1 \overline{1B}}{h}$

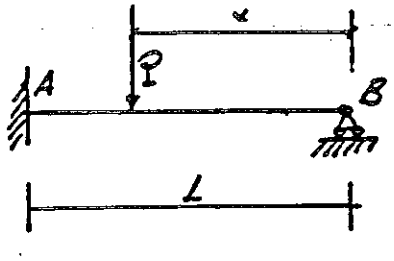
$\Sigma M_C = 0 \qquad R_1 \times \overline{1C} - N_{BD} \times h = 0 \Rightarrow N_{BD} = \frac{R_1 \times \overline{1C}}{h}$

b) Fuerza unidad a la izquierda de A: (Figura anterior)

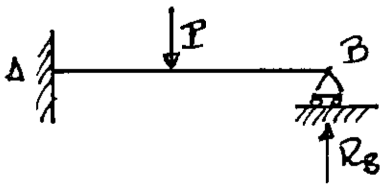
$\Sigma M_B = 0 \qquad N_{AC}\, h + R_2 \times \overline{2B} = 0 \Rightarrow N_{AC} = -\frac{R_2 \overline{2B}}{h}$

$\Sigma M_C = 0 \qquad N_{BD} \times h - R_2 \times \overline{2D} = 0 \Rightarrow N_{BD} = \frac{R_2 \times \overline{2D}}{h}$

PROBLEMA .- Calcular la linea de influencia de la reacción en el extremo B de la viga representada en la figura cuando la recorre una carga P. El valor de la rigidez EI es constante.

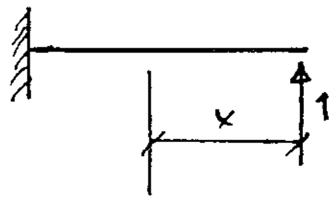


$$M = x \Rightarrow -EI\frac{d^2y}{dx^2} = x$$



$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = l \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \\ C_1 = \frac{l^2}{2} \end{array} \right.$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{2} + \frac{l^2}{2}$$



$$EI\,y = -\frac{x^3}{6} + \frac{l^2}{2}x + C_2$$

$$x = l \Rightarrow y = 0$$

$$0 = -\frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{2} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{l^3}{3}$$

$$EI\,y = -\frac{x^3}{6} + \frac{l^2}{2}x - \frac{l^3}{3}$$

$$y_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{l^3}{3}\right]$$

$$P\,y = R_B\,y_B$$

$$R_B = \frac{P\,y}{y_B} = \cancel{EI}\left(-\frac{3}{l^3}\right)P\,\frac{1}{\cancel{EI}}\left[-\frac{x^3}{6} + \frac{l^2}{2}x - \frac{l^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{P}{2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\right]$$

Con la x medida desde A:

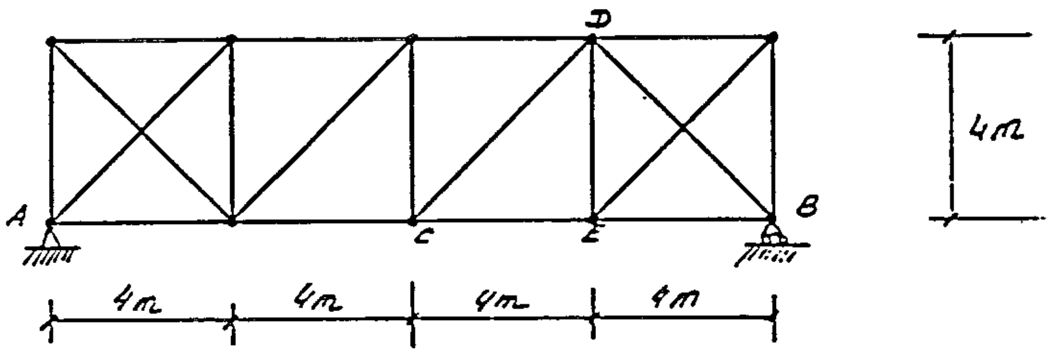
$$R_B = \frac{Px^2}{2l^3}(3l - x)$$

A)Determinar la linea de influencia del esfuerzo axil en la barra $\overline{CD}$ de la estructura representada en la figura cuando una carga vertical unidad recorre el cordón inferior AB.

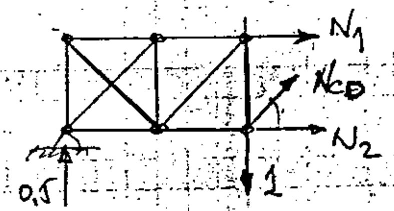
B)Suponiendo que la barra $\overline{CD}$ tiene un error de ejecución de forma que es 5 mm mas corta de su longitud y la barra $\overline{CE}$ sufre un aumento de temperatura de 60ºC,hallar el descenso del nudo C.

C)Suponiendo que las barras $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$ sufriesen una variación de temperatura de -50ºC,calcular el movimiento horizontal del nudo B.

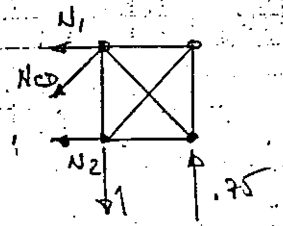
Datos:Para todas las barras $L/EA=10^{-4}$ m/T $\alpha=10^{-5}$ºC^{-1}



1º)

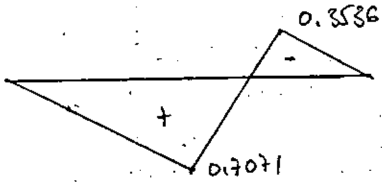


$0,5 - 1 + N_{CE}\,\text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow N_{CD} = \frac{0,5}{\text{sen}\,45} = 0,707$

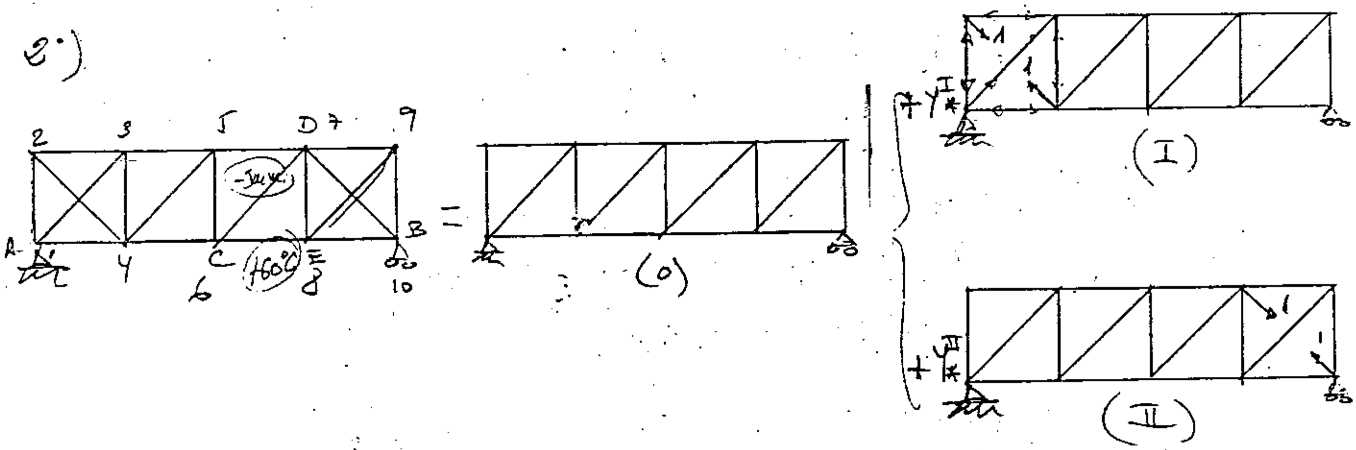


$N_{CD}\,\text{sen}\,45 + 1 - 0,75 = 0 \Rightarrow N_{CD} = -\frac{0,25}{\text{sen}\,45} =$

$= -0,3536$



2º)



$N_i = N_i^0 + Y^I N_i^I + Y^{II} N_i^{II}$

$$r = \sum N_i^R \left[\left(N_i^0 + Y^I N_i^I + Y^{II} N_i^{II} \right) \Delta + \delta^{0} \right]$$

$\delta_{CD} = \delta_{6-7} = -5\ \text{mm}$.

$\delta_{CE} = \delta_{6-8} = \alpha \Delta T L = 10^{-5} \times 60 \times 4000 = 2.4\ \text{mm}$

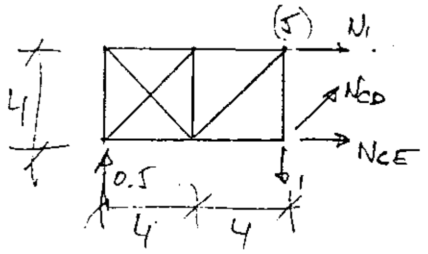
BARRA	N^0	N_i^{I}	N_i^{II}	$\Delta = \frac{L}{EA}$	δ (preg 2.)	N_i^{III}	δ (preg.)
1-2	0	$-\sqrt{2}/2$	0	10^{-4}	0		0
1-3	0	1	0	"	0		0
1-4	0	$-\sqrt{2}/2$	0	"	0		0
2-3	0	$-\sqrt{2}/2$	0	"	0		0
3-4	0	$-\sqrt{2}/2$	0	"	0		0
3-5	0	0	0	"	0		0
4-5	0	0	0	"	0		0
4-6	0	0	0		0		0
5-6	0	0	0	"	0		0
5-7	0	0	0	"	0		0
6-7	0	0	0	"	-0,005	0.7071	0
6-8	0	0	0	"	0,0024	0.5	-0,002
7-8	0	0	$-\sqrt{2}/2$	"	0		-0,002
7-9	0	0	$-\sqrt{2}/2$	"	0		0
8-9	0	0	1	"	0		0
8-10	0	0	$-\sqrt{2}/2$	"	0		0
9-10	0	0	$-\sqrt{2}/2$	"	0		0

$$-Y^{I}\Delta_{2-4} = \sum\left(\cancel{N_i^0 N_i^{I}\Delta_i}^{\,0} + N_i^{I\,2} Y^{I}\Delta_i + \cancel{N_i^{I} N_i^{II}}^{\,0} Y^{II}\Delta_i + \cancel{N_i^{I}\delta_i}^{\,0}\right)$$

$$-Y^{II}\Delta_{7-10} = \sum\left(\cancel{N_i^0 N_i^{II}\Delta_i}^{\,0} + \cancel{N_i^{I} N_i^{II}}^{\,0} Y^{I}\Delta_i + N_i^{II\,2} Y^{II}\Delta_i + \cancel{N_i^{II}\delta_i}^{\,0}\right)$$

Por tanto: $\underline{Y^{I} = Y^{II} = 0}$ Lógico, con sólo mirar la estructura (parte isostática).

N_i^{III} solo necesitamos $N_{CE} \equiv N_{6-8}$; $N_{CD} \equiv N_{67}$ por tanto:



$\sum F_v = 0; N_{CD} = \frac{0.5}{\operatorname{sen} 45} = 0.7071$

$\sum M_5 = 0; \quad 0.5 \times 8 = 0.7071 \times 4 \times \cos 45 + N_{CE}\, 4$

$N_{CE} = 0.5$

$Y = \sum N_i^{2}\delta^{i} = 0.7071 \times (-0.005) + 0.5 \cdot 0.0024 = \underline{-0.002335\,m}$

3') $\delta_{6-8} = \delta_{7-10} = -10^{-5} \times 50 \times 4 = -0.002$

$$-y^{I}\Delta_{2-4} = \sum\left(\cancelto{0}{N_i^0 N_i^{I}\Delta_i} + N_i^{I^2} y^{I}\Delta_i + \cancelto{0}{N_i^{I} N_i^{II} y^{II}\Delta_i} + \cancelto{0}{N_i^{I}\delta_i}\right) \Rightarrow \boxed{y^{I}}$$

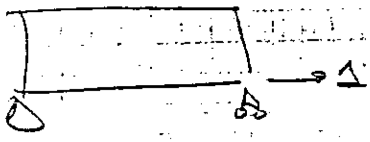
$$-y^{II}\Delta_{7-10} = \sum\left(\cancelto{0}{N_i^0 N_i^{II}\Delta_i} + N_i^{I} N_i^{II} y^{I}\Delta_i + N_i^{II^2} y^{II}\Delta_i + N_i^{II}\delta_i\right)$$

$$-y^{II}\Delta_{7-10} = \sum N_i^{II^2} y^{II}\Delta_i + \sum N_i^{II}\delta_i$$

$$y^{II} = -\frac{\sum N_i^{II}\delta_i}{\Delta_{7-10} + \sum N_i^{II^2}\Delta_i} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,0.002}{10^{-4} + 10^{-4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = -3.536$$

Corrimiento de 6:

N_i^{IV}



$$\Rightarrow \begin{cases} N_{1-4} = N_{4-6} = N_{6-8} = N_{8-10} = 1 \\ \text{el resto } N_i = 0. \end{cases}$$

$$r_h^B = \sum N_i^{IV} N_i^{II} y^{II}\Delta_i + \sum N_i^{IV}\delta_i =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(-3.536)\,10^{-4}\right) + (-0.002) = -1.75\ \text{mm}$$

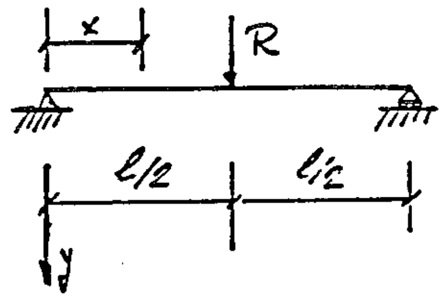
(← a la izquierda)

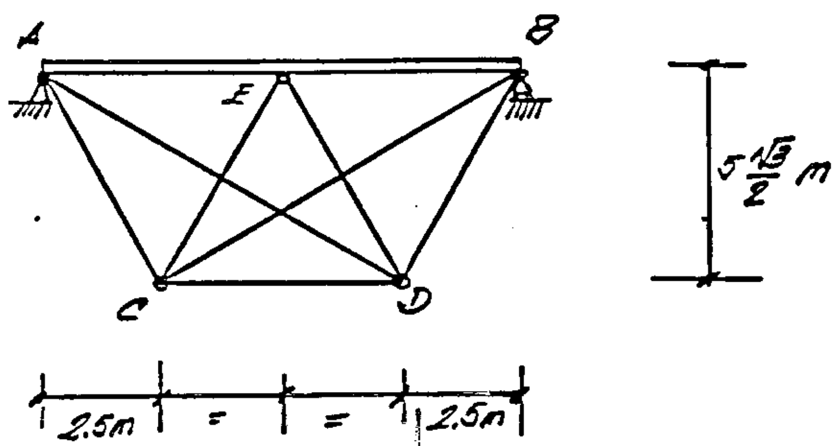
PROBLEMA .- Obtener la linea de influencia del esfuerzo axil en la barra CD de la estructura representada en la figura, cuando una carga unidad dirigida hacia abajo recorre la barra AB.

Datos:

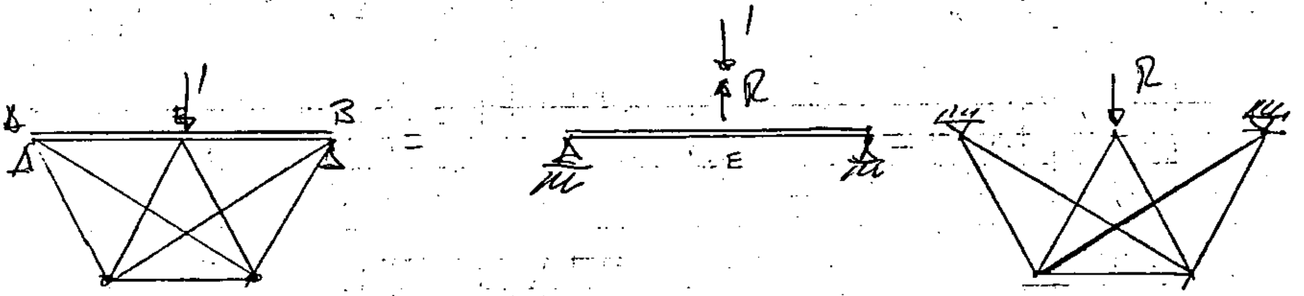
- Barra AB: Infinitamente rígida frente a esfuerzos axiles.
  $E = 2\ 10^{7}\ T/m^{2}$; $I = 0.026\ m^{4}$
- Resto de las barras:
  $L/EA = 2\ 10^{-4}\ m/T$
- Se recuerda que:

$$y = \frac{R \ell^2 x}{16 EI}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{x^2}{\ell^2}\right)$$





Vamos a calcular el valor de N_{CD} para una carga unidad situada en E.

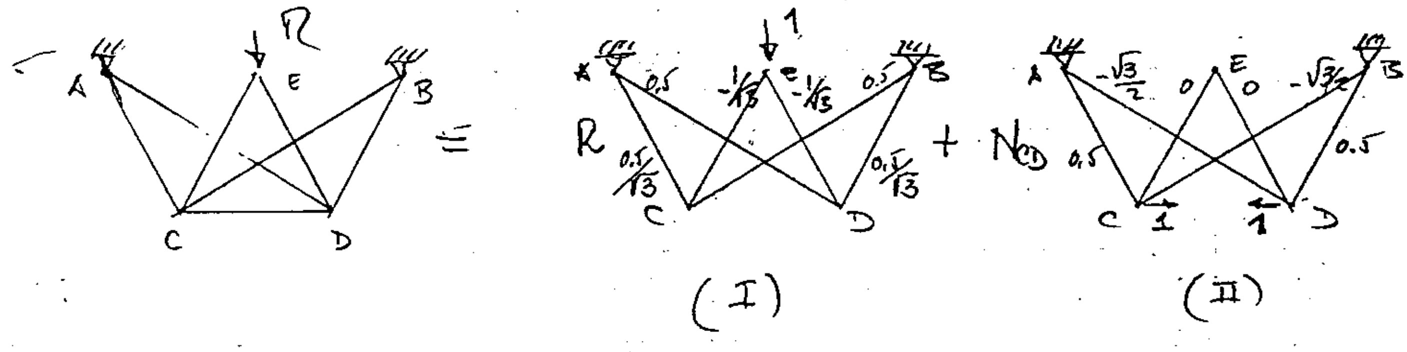


$$\left[\delta_{V}^{E}\right]_{viga} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(1-R)L^3}{48EI} =$$

$$= \frac{(1-R)\,10^{-3}}{48{,}2\times10^{6}\times0{,}026} = \frac{1-R}{2496} = \left[\delta_{V}^{E}\right]_{celosía} \qquad (1$$

Celosía:

1: Vamos a poner N_{CD} en función de R



$$\left[\delta_{CD}\right]_{estr.} = \left[\delta_{CD}\right]_{barra} \Rightarrow \quad -\frac{L}{EA} N_{CD} = \frac{L}{EA}\sum\left(R N_i^{I} N_i^{II} + N_{CD} {N_i^{II}}^{2}\right)$$

$$-N_{CD} = -R\frac{1}{\sqrt{3}} + 2N_{CD}$$

$$\boxed{N_{CD} = \frac{1}{3\sqrt{3}}R} \qquad (3)$$

2.- Se calcula el desplazamiento vertical de E:

$$\left\{\delta_v^E\right\}_{calorif.} = \sum \frac{L}{EA}\left(R N^{I} + N_{CD} N^{II}\right) N^{I} = \sum \frac{L}{EA}\left(R {N^{I}}^2 + N_{CD} N^{I} N^{II}\right)$$

$$= 2\times10^{-4}\left(R\,\frac{4}{3} + N_{CD}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\times10^{-4}\left(R\,\frac{4}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,R\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\times10^{-4}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{9}\right)R = \frac{R}{4091} \qquad (2)$$

Al sustituir en (1):

$$\frac{1-R}{2496} = \frac{R}{4091} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{1+\frac{2496}{4091}} = 0.6211}$$

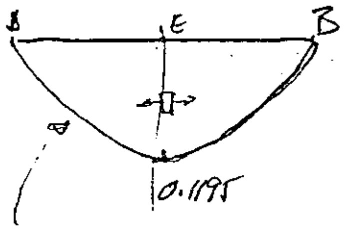
Y por tanto el desplazamiento vertical en E es según (2):

$$\left\{\delta_v^E\right\}_{calorif.} = \frac{R}{4091} = \frac{0.6211}{4091} = \boxed{1.518\times10^{-4}\ m}$$

Y el valor del axil en la barra CD, entrando en (3):

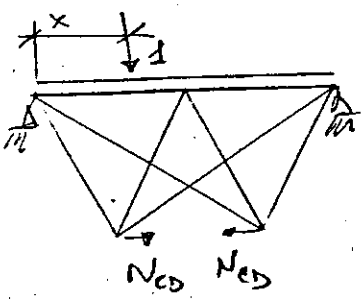
$$\boxed{N_{CD} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,R = 0.1195\ T}$$

que es el valor de la línea de influencia en el punto E.

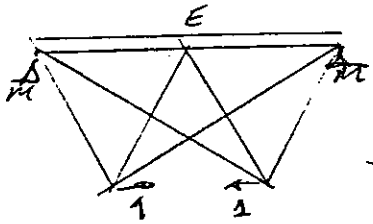


de 3er grado como se ve en la pág. siguiente.

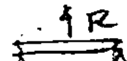
Linea de influencia con la carga en posición x:



(P)



(Q)



$\left[\delta_v^E\right] = \frac{R}{2496}$

$\rightarrow \left\{ R\,(\text{Estado I}) + (\text{Estado I}\right.$

Por reciprocidad $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_i\, u_{iQ} = \sum_{i=n+1}^{m} Q_i\, u_{iP}}$

$$(1)^P \left(\delta_v^x\right)^Q + \left(N_{CD}\right)^P \left(\delta_{CD}\right)^Q = (1)^Q \left(\frac{N_{CD}\, L}{EA}\right)^P$$

$$\boxed{N_{CD} = \frac{-\left(\delta_v^x\right)^Q}{\left(\delta_{CD}\right)^Q - \frac{L}{EA}}}$$

Se calcula $\left(\delta_v^x\right)^Q$:

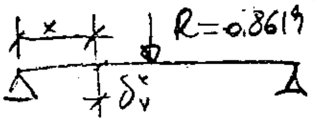
$$\left[\delta_v^E\right]_{celosía} = \sum \frac{L}{EA}\left(R\, N_i^I + N_i^{II}\right) N^I = \frac{L}{EA}\left(R\, {N_i^I}^2 + N_i^I N_i^{II}\right) =$$

$$= 2\cdot 10^{-4}\left(R\,\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Igualando con el de la viga $\left[\delta_v^E\right]_{celosía} = \left[\delta_v^E\right]_{viga}$

$$\frac{R}{2496} = 2\times 10^{-4}\,\frac{4}{3}\,R - \frac{2\times 10^{-4}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{R = -0{,}8619}}$$

Por tanto:



$$\left(\delta_y^x\right)^Q = \frac{R\, \ell^2 x}{16\, EI}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{x^2}{\ell^2}\right)$$

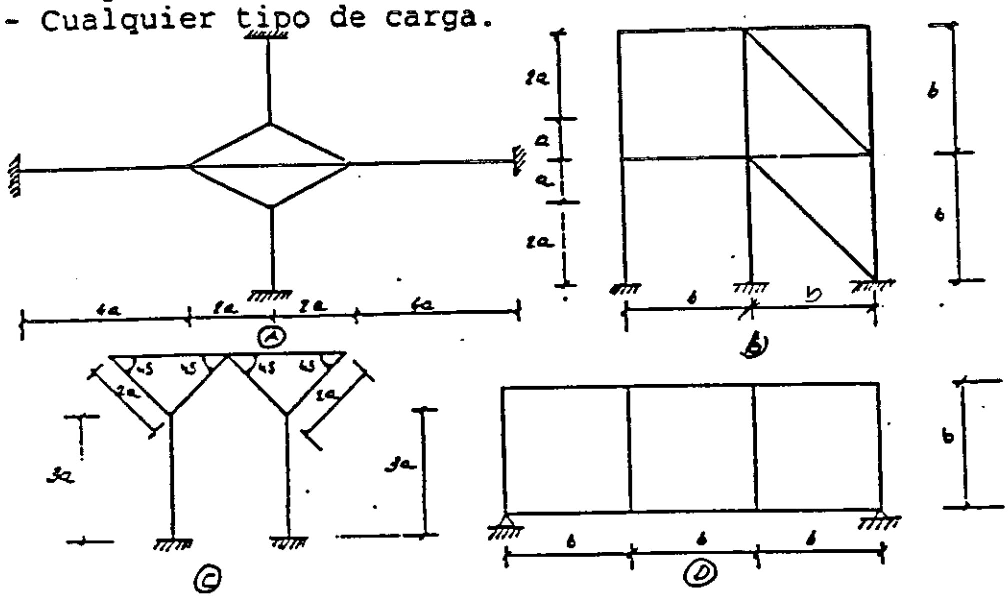
Se calcula $\left(\delta_{CD}\right)^Q$:

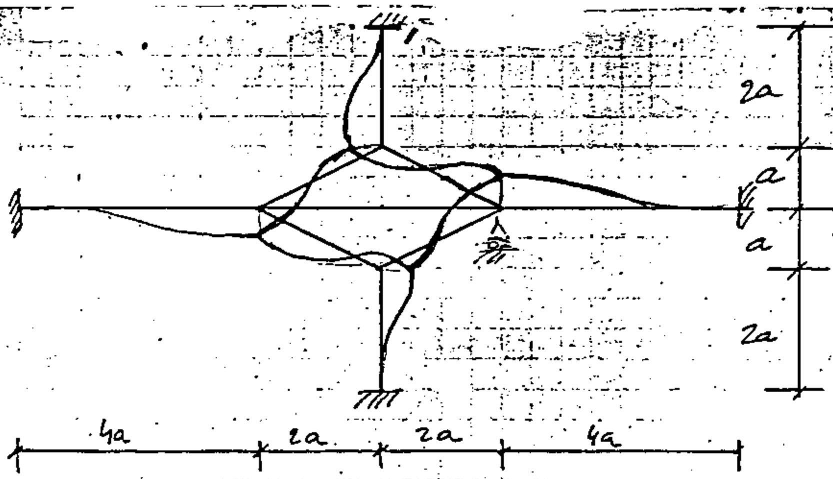
$$\left(\delta_{CD}\right)^Q = \sum \frac{L}{EA}\left(R\, N_i^I + N_i^{II}\right) N_i^{II}$$

PROBLEMA .- Indicar, razonándolo debidamente, cual es el grado de traslacionalidad de las estructuras de la figura en los supuestos de estar sometidas a:

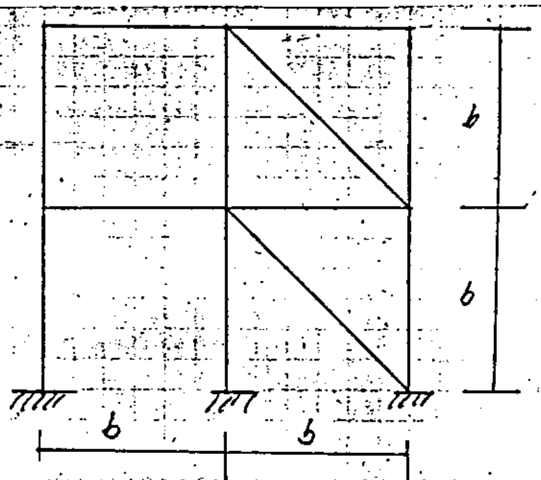
a.- Carga simétrica (cuando esto tenga algún significado)

b.- Cualquier tipo de carga.





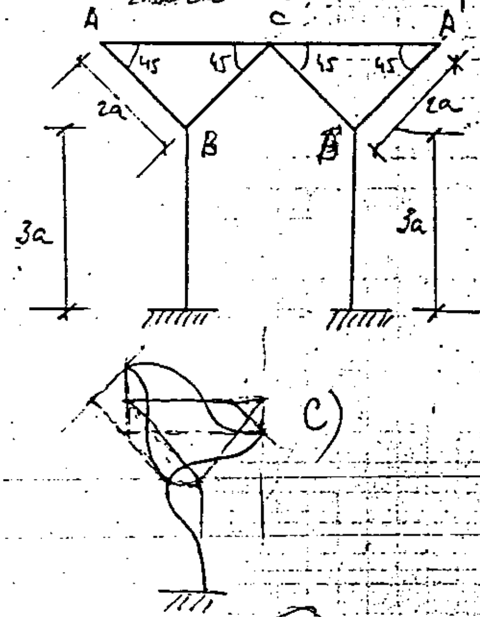
a)



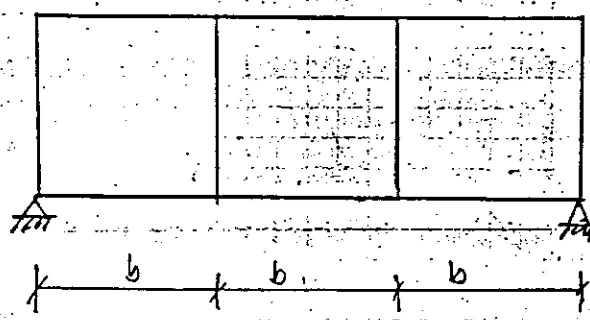
b)

1- Intraslacional (los nudos giran pero no se trasladan
2- Traslacional =1 (sólo hay que colocar un apoyo).
$b+r = 9+8 = 17$
$2n = 2\times 8 = 16$

La estructura no es simétrica y no tiene sentido hablar de carga simétrica
Por la triangulación ⇒ INTRASLACIONAL
$b+r = 12+6 = 18$
$2n = 2\times 9 = 18$



C)

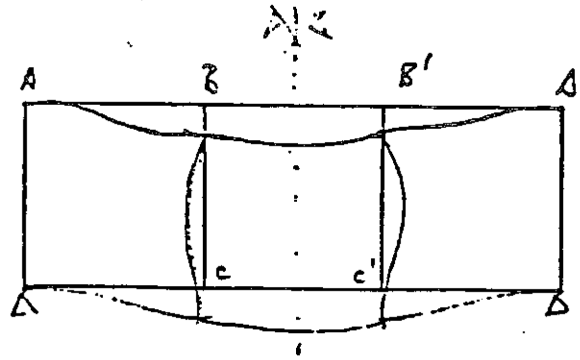


d

$b+r = 10+4 = 14$
$2n = 2\times 8 = 16$ } 2

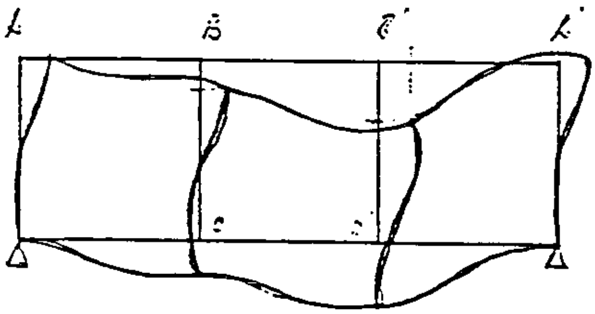
1- Traslacional 1
2- Hay traslacionalidad horiz. de AA'
Hay traslacionalidad horiz. (solo) de BB' ($\delta_B \neq \delta_{B'}$)
Grado 2 ⇐ $b+r = 8+4 = 12$
$2n = 2\times 7 = 14$

C. simétrica



$v_B = v_{B'} = v_C = v_{C'}$ $\Rightarrow$ Traslacional

C. cualquiera:



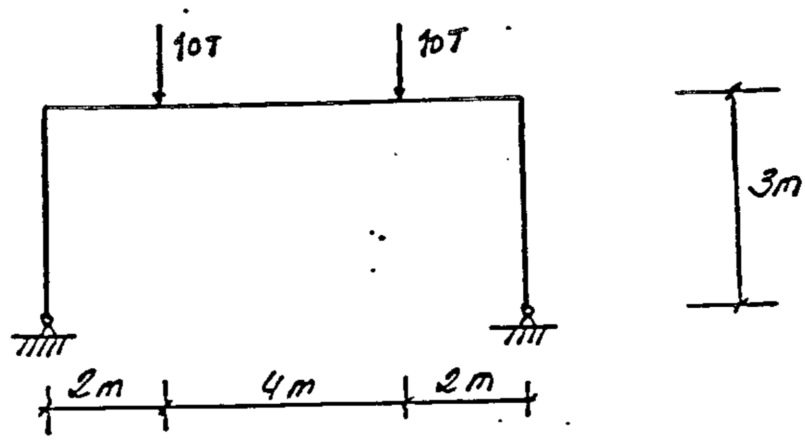
$h_A = h_{A'}$ no [illegible]

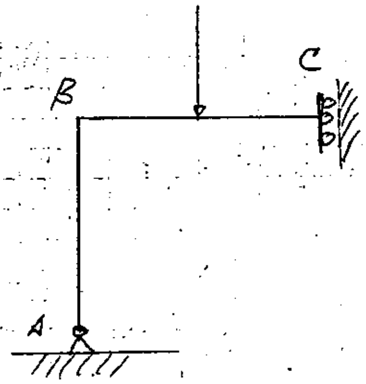
$v_B \neq v_{B'}$

$v_B = v_C$

$v_{B'} = v_{C'}$

PROBLEMA .- Calcular las reacciones en los apoyos, así como dibujar las leyes de momentos flectores, cortantes y axiles en la estructura representada en la figura, sabiendo que para todas las barras el producto EI es igual a 1 T m².



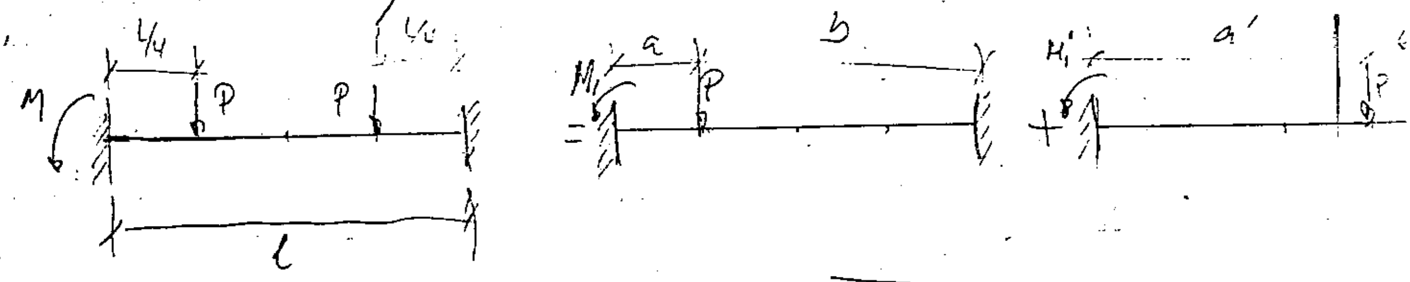


- Rigideces y coef. de reparto.

$$K_{BC} = \frac{1}{2}\,\frac{4EI}{L} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{8} = \frac{1}{4} \qquad c_{BC} = \frac{1/4}{1+1/4} = \frac{1}{5} = 0.2$$

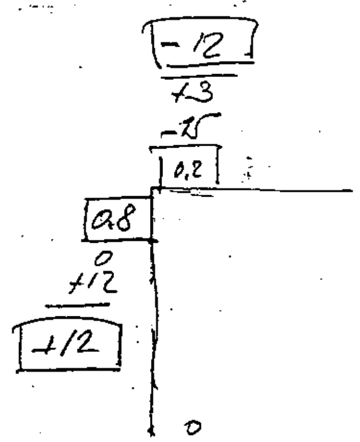
$$K_{BA} = \frac{3}{4}\,\frac{4EI}{h} = \frac{3}{4}\,\frac{4}{3} = 1 \qquad c_{BA} = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5} = 0.8$$

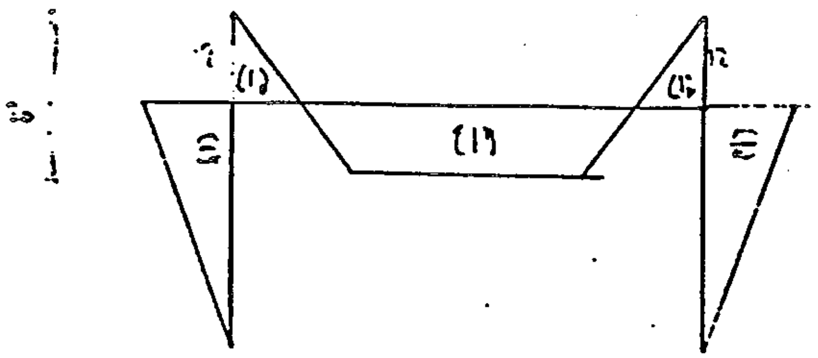
- Momentos de empotramiento:

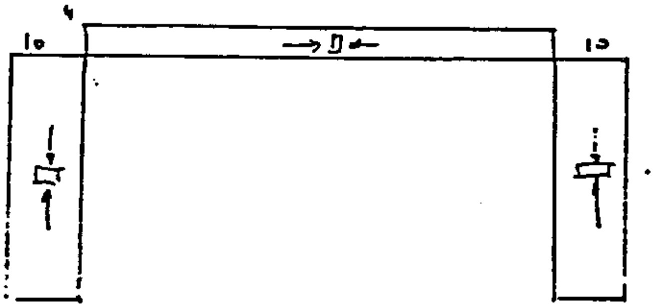


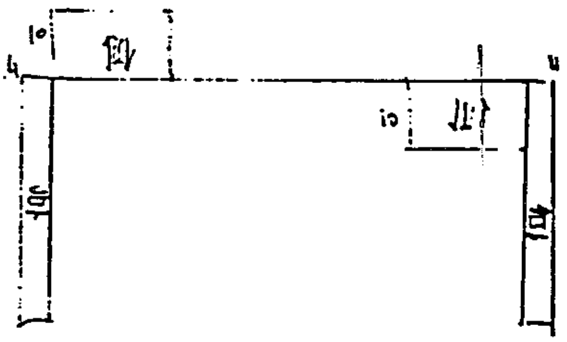
$$\left[M = M_1 + M_1' = \frac{Pab^2}{l^2} + \frac{Pa'b'^2}{l^2} = \boxed{\frac{Pab}{l}} \right] = \frac{10\times 2\times 6}{8} = \underline{\underline{15}}$$

$a' = b$
$b' = a$







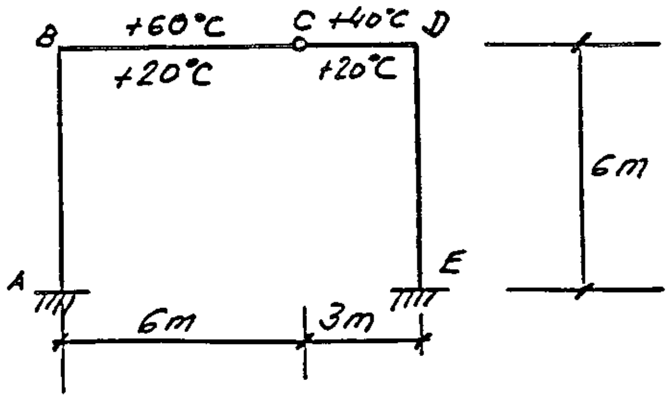


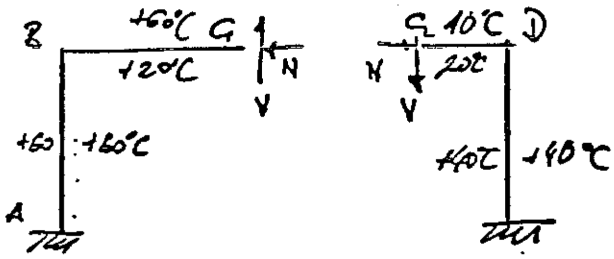
PROBLEMA .- Calcular las leyes da momentos flectores, reacciones en apoyos y movimientos del nudo C de la estructura de la figura, si las barras AB y ED sufren un aumento uniforme de temperatura de 60°C y 40°C respectivamente, y en la barras BC y CD los aumentos en sus caras superior e inferior son los indicados en la figura.

Datos: Las barras son de sección constante de canto h = 50 cm.

$EI = 10^3\ Tm^2$

$\alpha = 10^{-4}\ °C^{-1}$





Igualando mov. horiz. de C:

$$u_{C_2} = \frac{N6^3}{3EI} - \frac{3.V6.3}{EI} - 10^{-4}.3.\frac{40+20}{2}$$

$$u_{C_1} = -\frac{N6^3}{3EI} - \frac{6.V6.3}{EI} + 10^{-4}.6.\frac{60+20}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{24N + 9V = 5.5}$$

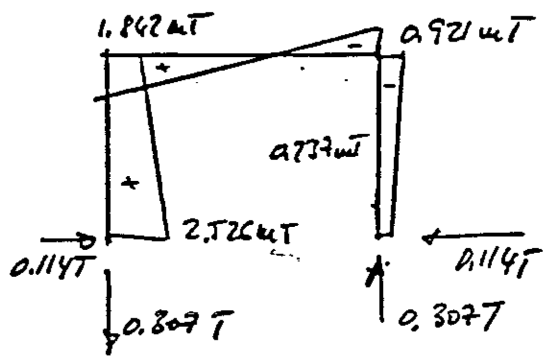
Igualando mov. vert. de C:

$$v_{C_2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}3.3.V.\frac{2}{3}3 + 3V.6.3\right) - \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}6.6N.3\right) - 10^{-4}6.40 + \int_0^3 x\,dx\,(40-20)\frac{\alpha}{h}$$

$$v_{C_1} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}6.6V.\frac{2}{3}6 + 6V6.6\right) - \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}6.6N.6\right) - 10^{-4}6.60 + \int_0^6 x\,dx\,(60-20)\frac{\alpha}{h}$$

resulta. $\boxed{18N + 117V = 38}$

$$\left.\begin{array}{l} 24N + 9V = 5.5 \\ 18N + 117V = 38 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N = 0.114\,T \\ V = 0.307\,T \end{array}$$



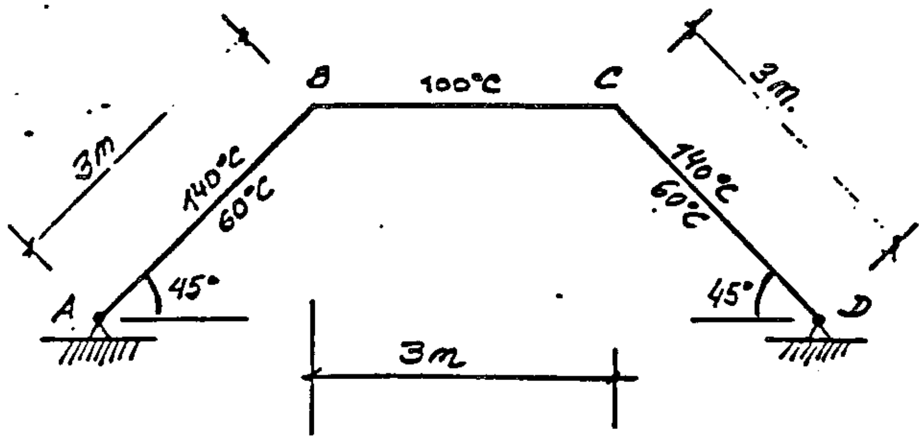
Sustituyendo: $\vec{u}_C = \frac{0.114.6^3}{3\times10^3} - \frac{54\times0.307}{10^3} - 9.10^{-3} = -17.4\times10^{-3}\,m$ (Izq.)

$$v_C = \frac{63\times0.307 - 54\times0.114}{10^3} - 6\cdot10^{-3} = 7,185\cdot10^{-3}\,m \text{ (Abajo)}$$

PROBLEMA .- Calcular las reacciones en los apoyos y diagrama de momentos flectores de la estructura representada en la figura.

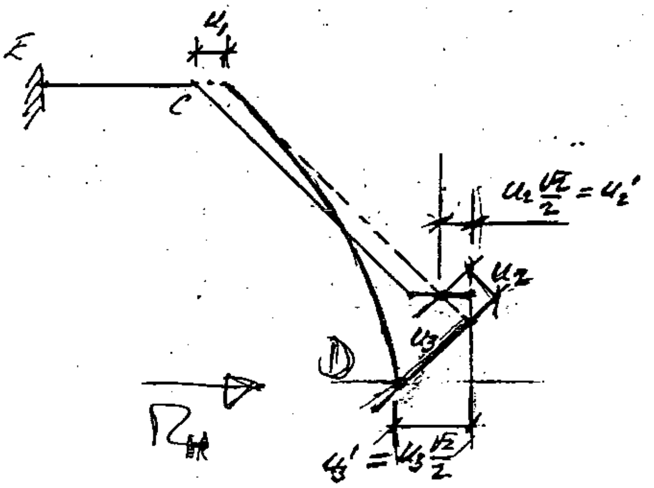
Las temperaturs se indican en la figura en las caras donde se producen, debiéndose considerar variación lineal con la altura de la sección del elemento. En la barra BC el incremento de temperatura es uniforme.

Datos: Altura de la sección de las vigas h = 0.5 m
$EI = 10^3$ Tm^2 ; $\alpha = 2\ 10^{-6}$ ºC^{-1} .



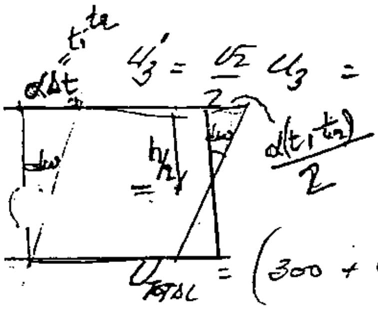
· Reacciones:

– No hay reacciones verticales
– Simetría ⇒ giro en el punto medio del dintel nulo.



$$u_1 = \alpha\,\Delta t\, l = 2\times10^{-6}\times 100\times 1.5 = 300\times10^{-6}\ \text{m} \quad (\text{derecha})$$

$$u_2' = \frac{\sqrt2}{2}u_2 = \frac{\sqrt2}{2}\,\alpha\,\Delta t\, l = \frac{\sqrt2}{2}\,2\times10^{-6}\left(\frac{140+60}{2}\right)3 = 424.3\ 10^{-6}\ \text{m} \quad (\text{derec}$$



$$u_3' = \frac{\sqrt2}{2}u_3 = \frac{\sqrt2}{2}\int_0^l x\frac{\alpha\,\Delta t}{h}\,dx = \frac{\sqrt2}{2}\,\frac{\alpha\,\Delta t}{h}\,\frac{l^2}{2} = 1018.2\times10^{-6}\ \text{m} \quad (\text{izqui}$$

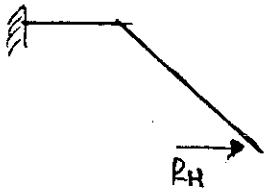
$$\left(\frac{\sqrt2}{2}\,\frac{2\times10^{-6}}{0.5}(140-60)\frac{9}{2}\right)$$

dw

$$u_{TOTAL} = (300+424-1018)\,10^{-6} = -294\cdot10^{-6}\ \text{m} \quad (\text{izquierda}).$$

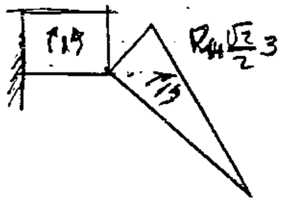
· Corrimiento horizontal:

-Debido a R_H: $u_D = \frac{1}{EI}\left[\frac{\left(R_H\frac{3\sqrt2}{2}\right)3^3}{3}\,\frac{\sqrt2}{2} + \left(\frac{3\sqrt2}{2}R_H\,1.5\times3\right)\frac{\sqrt2}{2}\right] =$



$$= 11.25\times10^{-3}\times R_H = 294\times10^{-6}$$

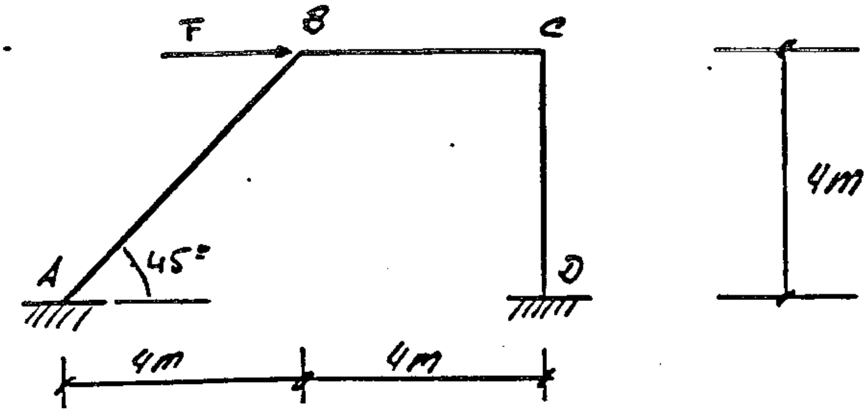
$$R_H = 26.13\times10^{-3}\ T = 26.13\ \text{kg}.$$

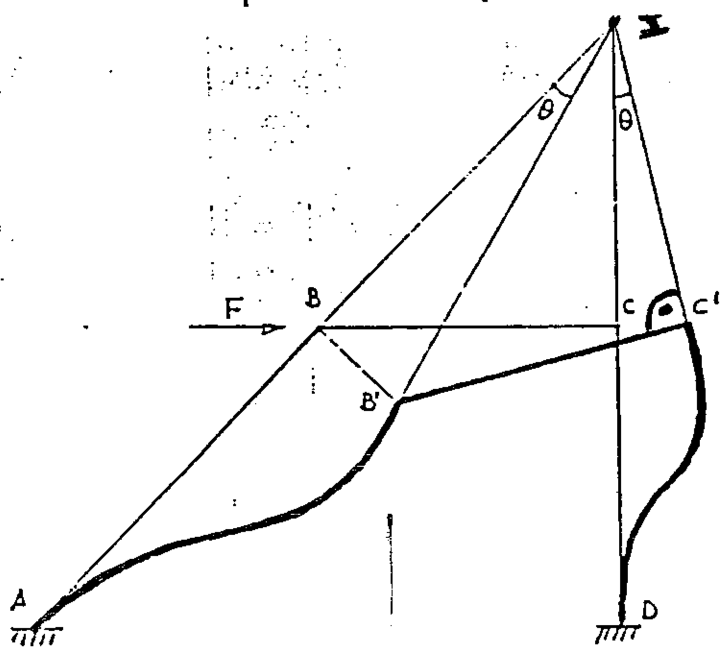


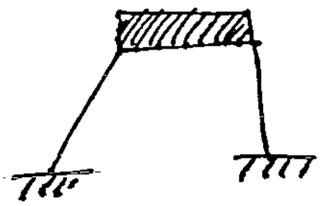
57.43

Ley de Momentos flectores

PROBLEMA .- Calcular las leyes de momentos flectores en todas las barras de la estructura representada en la figura, sabiendo que la inercia de la barra BC se puede considerar infinita y las de las otras barras es igual y de valor I. El módulo de elasticidad para todas las barras es el mismo y su valor E. 75







La estructura es traslacional de grado 1. La barra de rigidez infini-ta no se deforma:

$$\varphi_B = +\theta = \varphi_C \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{BA} = BB' = 4\sqrt{2}\,\theta \\ \delta_{CD} = CC' = 4\theta \end{array} \right.$$

$$\quad K \qquad\qquad K\ \delta$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{l_{BA}}\varphi_B + \frac{6EI\,4\sqrt{2}\,\theta}{l_{BA}^2} = \frac{EI}{\sqrt{2}}\theta + \frac{6EI\theta}{4\sqrt{2}} = \frac{5EI\theta}{2\sqrt{2}}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l_{BA}}\varphi_B + \frac{6EI\,4\sqrt{2}\,\theta}{l_{BA}^2} = \frac{EI}{2\sqrt{2}}\theta + \frac{6EI\theta}{4\sqrt{2}} = \frac{2EI\theta}{\sqrt{2}}$$

$$M_{CD} = \frac{4EI}{4}\varphi_C + \frac{6EI\,4\theta}{4^2} = \frac{5EI\theta}{2}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{4}\varphi_C + \frac{6EI\,4\theta}{4^2} = 2EI\theta$$

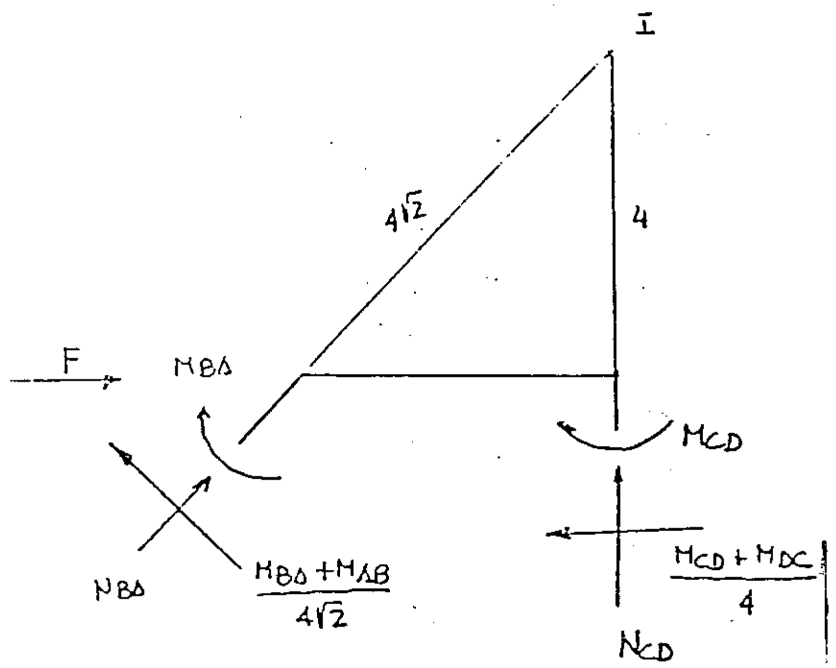
Las ecuaciones elásticas de la barra BC no podemos plantearlas al ser la barra de rigidez infinita.

Por equilibrio de los nudos B y C determinamos M_{CB} y M_{BC}

$$M_{BC} = -M_{BA} = -\frac{5EI\theta}{2\sqrt{2}}$$

$$M_{CB} = -M_{CD} = -\frac{5EI\theta}{2}$$

Por tanto vemos que planteados todos los momentos solo tenemos una incognita θ. Para determinarla tenemos que plantear la ecuación de equilibrio de cortantes



Tomando momentos respecto a I

$$2M_{BA} + M_{AB} + 2M_{CD} + M_{DC} = 4F$$

$$\frac{5EI\theta}{\sqrt{2}} + \frac{2EI\theta}{\sqrt{2}} + 5EI\theta + 2EI\theta = 4F$$

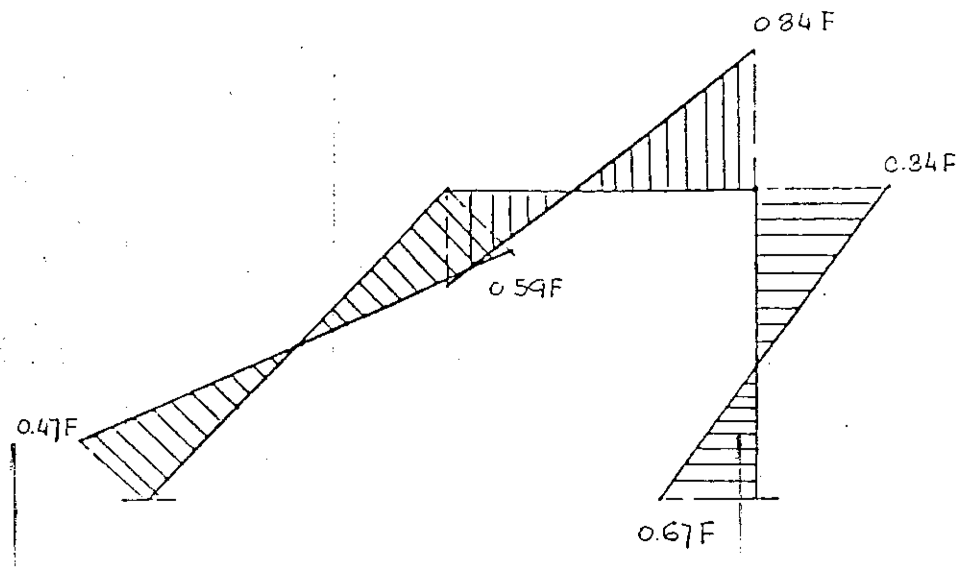
$$\theta = \frac{4\sqrt{2}\,F}{7(1+\sqrt{2})EI} = 0.3347\,\frac{F}{EI}$$

Una vez determinado θ conocemos todos los momentos y podemos dibujar la ley de flectores.

$M_{AB} = 0.473\,F$ $\qquad M_{CB} = -0.837\,F$

$M_{BA} = 0.592\,F$ $\qquad M_{CD} = 0.837\,F$

$M_{BC} = -0.592\,F$ $\qquad M_{DC} = 0.669\,F$



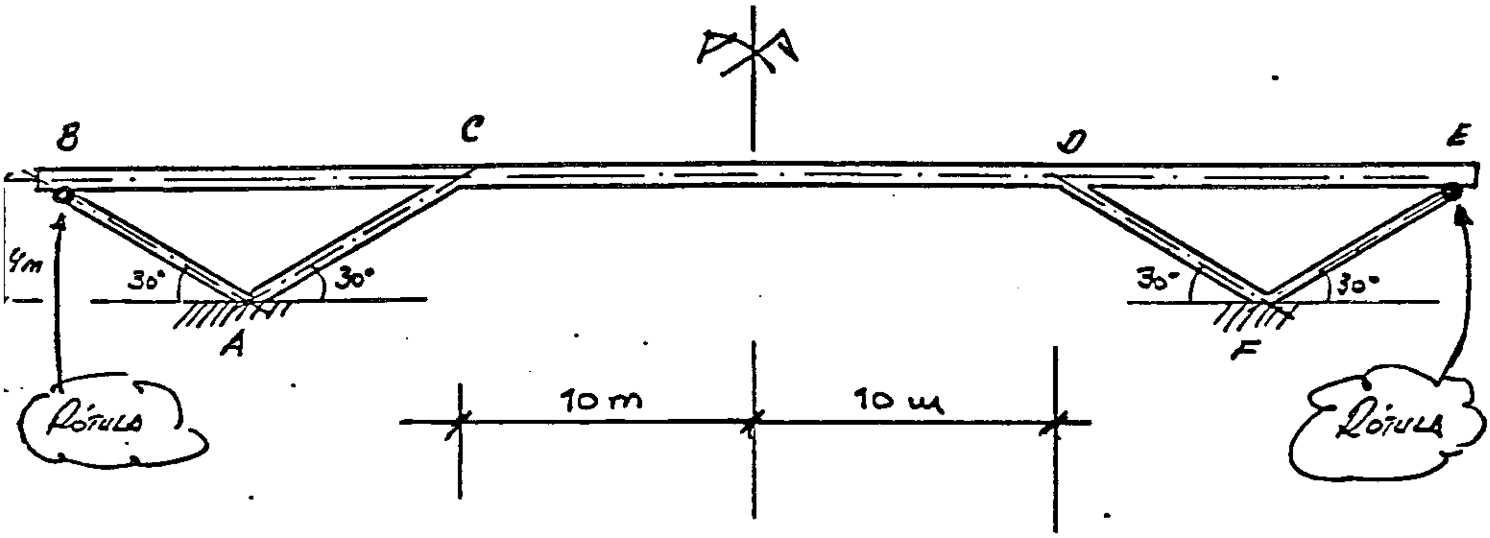
PROBLEMA ...- Determinar el giro en el nudo C de la estructura representada en la figura suponiendo que en el apoyo A se produce un descenso de 6 cm.

Datos : $I_{CD} = I$

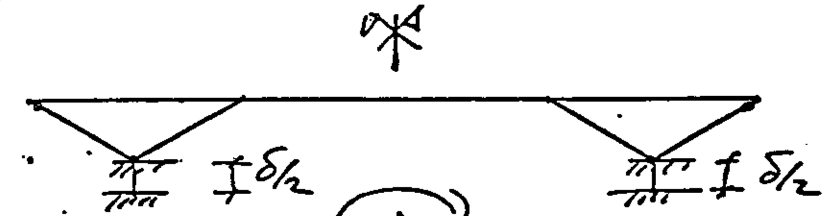
$I_{BC} = I_{DE} = 0.8\ I$

$I_{AC} = I_{DF} = I_{AB} = I_{EF} = 0.5\ I$

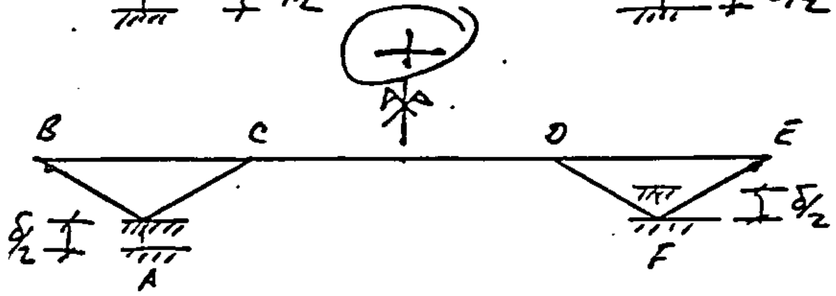
El módulo de elasticidad es E para todas las barras.



Se descompone en suma de dos estados, uno simétrico y otro antimétrico



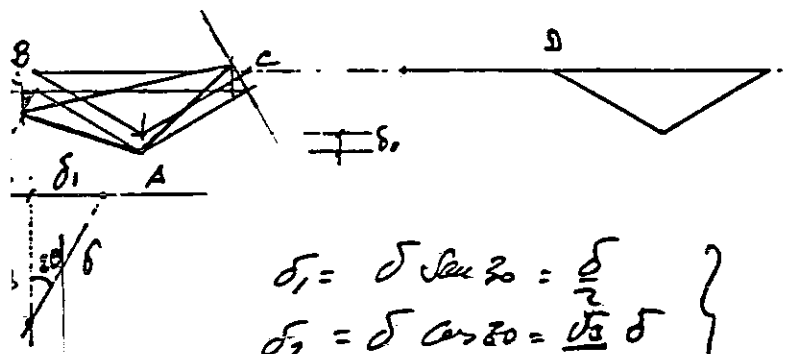
⇒ Simétrico, No produce esfuerzos



⇒ ANTIMÉTRICO.

$M_{CD} = M_{DE}$

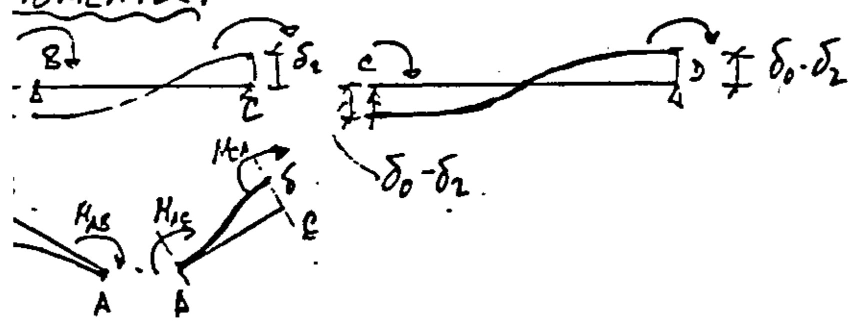
$\varphi_C = \varphi_D = \varphi$



GRADO DE TRASLACIONALIDAD 1

$$\delta_1 = \delta \operatorname{sen} 30 = \frac{\delta}{2}$$
$$\delta_2 = \delta \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$$

MOMENTOS:



$$M_{CA} = \frac{4EI_{AC}}{l_{AC}}\varphi_C - \frac{6EI_{AC}\,\delta}{l_{AC}^2} = IE\left[\frac{4\,\frac{1}{2}}{8}\varphi_C - \frac{6\,\frac{1}{2}\,\delta}{64}\right] = IE\left[0.25\varphi_C - \frac{3}{64}\delta\right]$$

$$M_{AC} = \frac{2EI_{AC}}{l_{AC}}\varphi_C - \frac{6EI_{AC}\,\delta}{l_{AC}^2} = IE\left[\frac{2\,\frac{1}{2}}{8}\varphi_C - \frac{6\,\frac{1}{2}\,\delta}{64}\right] = IE\left[\frac{1}{8}\varphi_C - \frac{3}{64}\delta\right]$$

$$M_{AB} = -\frac{3EI\delta}{l_{AB}^2} = -EI\,\frac{3\,\frac{1}{2}\,\delta}{64} = -EI\,\frac{3}{128}\delta$$

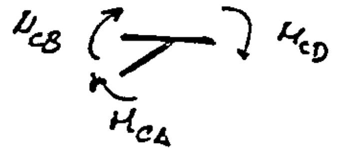
$$M_{CB} = \frac{4EI_{CB}}{l_{CB}}\varphi_C - \frac{6EI_{CB}\,\sqrt{3}\delta}{l_{CB}^2} = EI\left[\frac{4\times 0.8}{13.86}\varphi_C - \frac{6\times 0.8\times\sqrt{3}}{13.86^2}\delta\right] = EI\left[0.23\varphi_C - 0.0433\right]$$

$$M_{CD} = \frac{4EI_{CD}}{l_{CD}}\varphi_C + \frac{2EI_{CD}}{l_{CD}}\varphi_C - \frac{6EI\ 2(\delta_0 - \delta_2)}{l_{CD}^2} =$$

$$= EI\left\{\frac{4}{20}\varphi_C + \frac{2}{20}\varphi_C - \frac{6 \times 2\left(\delta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right)}{20^2}\right\} = EI\left\{0.3\varphi_C + 0.02598\delta - 0.03\delta_0\right\}$$

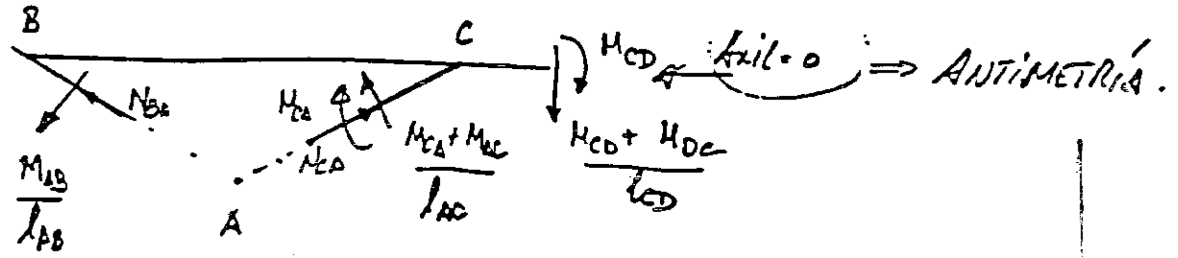
$\boxed{\sum M_C = 0} \Rightarrow$

$$0.23\varphi_C - 0.0433\delta + 0.3\varphi_C + 0.02598\delta - 0.03\delta_0 + 0.25\varphi_C - \frac{5}{64}\delta = 0$$



$$\boxed{0.78\varphi_C - 0.0642\ \delta - 0.03\delta_0 = 0}$$

$\boxed{\sum M_A = 0}$



$$M_{CD} + \cancel{M_{CA}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{l_{CD}}\frac{l_{BC}}{2} - \frac{\cancel{M_{CA}} + M_{AC}}{\cancel{l_{AC}}}\cancel{l_{AC}} - \frac{M_{AB}}{\cancel{l_{AB}}}\cancel{l_{AB}} = 0$$

$\boxed{M_{CD} = M_{DC}}$ por la antimetría.

$$M_{CD} + M_{CD}\frac{l_{BC}}{l_{CD}} - M_{AC} - M_{AB} = 0$$

$$\left[0.3\varphi_C + 0.02598\delta - 0.03\delta_0\right]\left(1 + \frac{13.86}{20}\right) - \left[\frac{1}{8}\varphi_C - \frac{3}{64}\delta\right] + \frac{3}{128}\delta = 0$$

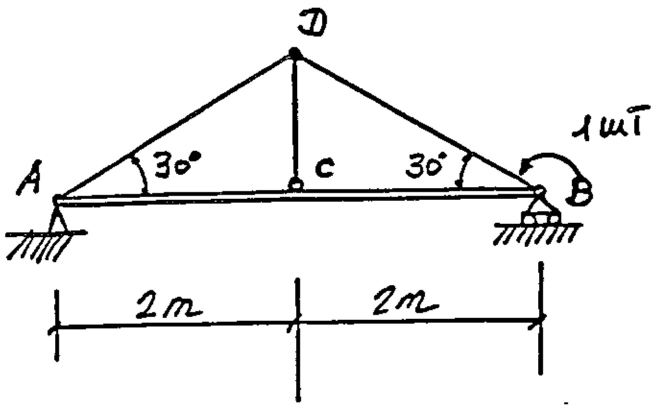
$$\boxed{0.3829\varphi_C + 0.1143\ \delta - 0.0508\delta_0 = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} 78\,\varphi_C - 6.42\,\delta - 3\,\delta_0 &= 0 \\ 38.29\,\varphi_C + 11.43\,\delta - 5.08\,\delta_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

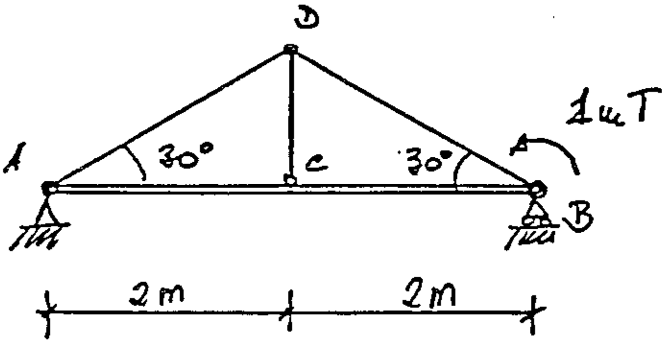
$$\left.\begin{aligned} 2986.62\,\varphi_C - 245.822\,\delta - 114.87\,\delta_0 &= 0 \\ -2986.62\,\varphi_C - 891.54\,\delta + 396.24\,\delta_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$-1137.362\,\delta + 281.37\,\delta_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta &= 0.2474\,\delta_0 \\ \varphi_C &= 0.05883\,\delta_0 \end{aligned}}$$

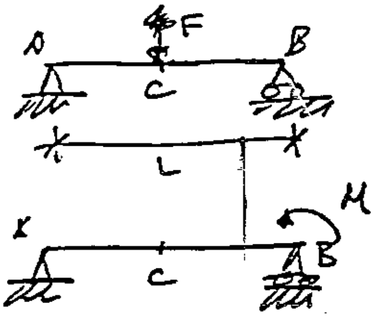
PROBLEMA .-Calcular el giro en el nudo B de la estructura representada en la figura ,sabiendo que la barra AB es inextensible y tiene $EI=1000\ T\cdot m^2$ y para el resto de las barras $EA=10000\ T$.



PROBLEMA: Calcular el giro en el nudo B de la estructura representada en la figura, sabiendo que la barra $\overline{AB}$ es inextensible y tiene $EI = 1000\ T/m^2$ y el resto de las barras $EA = 10000\ T$.



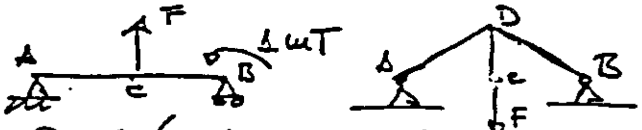
NOTA:



$f_c = \frac{FL^3}{48EI}$ $\quad \theta_B = \frac{FL^2}{16EI}$

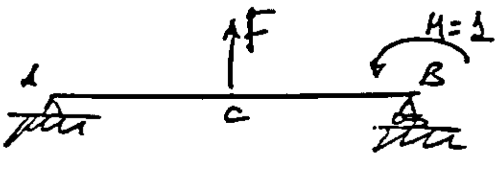
$f_c = \frac{ML}{6EI}\frac{L}{2} - \frac{1}{EI}\frac{1}{2}\frac{M}{2}\frac{L}{2}\frac{1}{3}\frac{L}{2}$ $\quad \theta_B = \frac{ML}{3EI}$

SE SEPARA EN DOS ESTRUCTURAS:



VIGA

Corrimiento vertical de C:

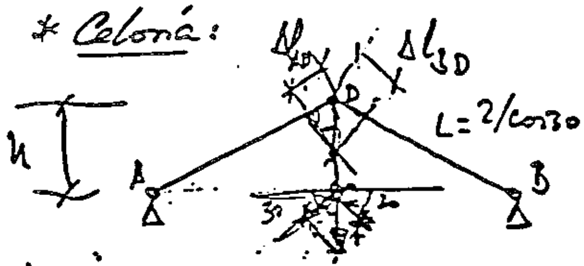


Se estudian por separado y se aplica como condición de compatibilidad que tienen el mismo desplazamiento vertical en C.

$$f_c = \frac{ML}{6EI}\times\frac{L}{2} - \frac{1}{EI}\frac{1}{2}\frac{M}{2}\frac{L}{2}\frac{1}{3}\frac{L}{2} - \frac{FL^3}{48EI} = \frac{4}{6\times 1000}\times 2 - \frac{4^2}{1000\cdot 48} - \frac{F4^3}{48\times 1000} =$$

$$\boxed{f_c = 10^{-3} - \frac{F}{750}}$$

* Celosía:



$$2 N_{AD} \times \operatorname{sen} 30 = F \Rightarrow \boxed{N_{AD} = N_{DB} = F}$$

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{BD} = \frac{L}{EA} F = \frac{F\,2}{10000 \times \cos 30}$$

(acortamiento)

$$f_D = \frac{\Delta l_{AD}}{\operatorname{sen} 30} = \frac{F\,2}{\frac{1}{2} \times 10000 \times \cos 30} = \frac{4F}{10000 \times \cos 30}$$

$$f_c = f_D + \Delta l_{DC} = \frac{4F}{10000 \times \cos 30} + \frac{hF}{EA} = \frac{4F}{10000 \cos 30} + \frac{2 \operatorname{tag} 30\, F}{10000} =$$

$$\boxed{f_c = \frac{5.774 \times F}{10000}}$$

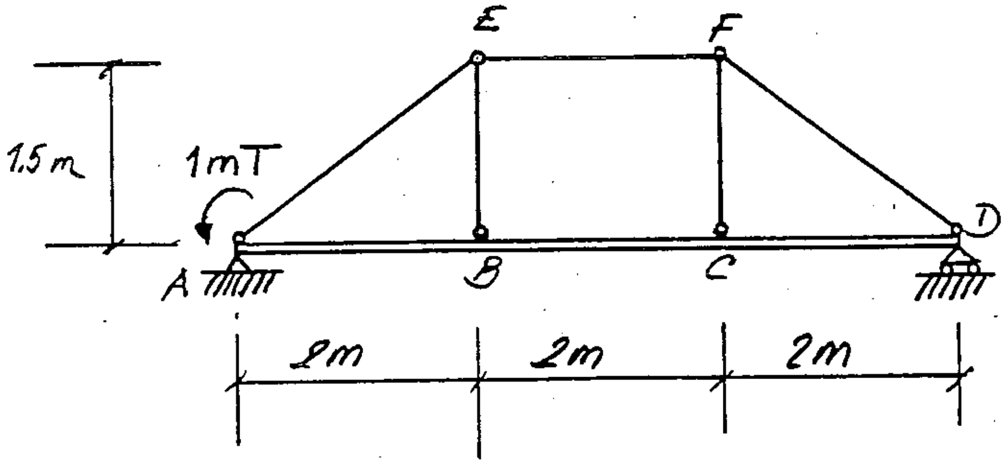
Imponiendo la condición de compatibilidad.

$$10^{-3} - \frac{F}{750} = \frac{5.774 \times F}{10000} \Rightarrow \boxed{F = 0.5234\ T}$$

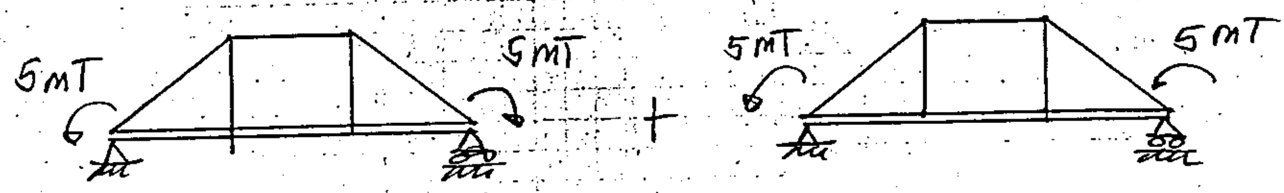
El giro en B es:

$$\theta_B = \frac{M L}{3EI} - \frac{F L^2}{16 EI} = \frac{1 \times 4}{3 \times 1000} - \frac{0.5234 \times 4^2}{16 \times 1000} = \boxed{8.099 \times 10^{-4}\ \mathrm{rad}}$$

PROBLEMA ...- Calcular el giro en el nudo A, así como el esfuerzo axil en la barra EF de la estructura representada en la figura, sabiendo que la barra AD es inextensible con un valor de $E*I= 4000.\ T*m^2$, y para el resto de las barras $E*A= 10000.\ T$.



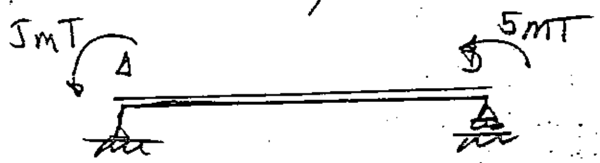
Se resuelve como suma de dos estados SIMETRICO y ANTIMETRICO:



ESTADO ANTIMETRICO:

BARRA EF tiene esfuerzo axil nulo ⇒ El resto de las barras de la parte articulada tienen esfuerzos NULOS.

Por tanto queda:



$$\omega_A = \frac{M_A}{K} = \frac{5}{\frac{6EI}{L}} = \frac{5}{\frac{6\times 4000}{6}} = 1.25\times 10^{-3}\ \text{rad}$$

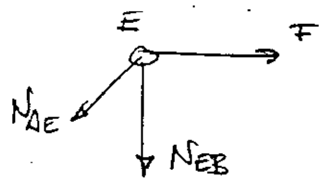
Rigidez ficticia de antimetría.

También se podría hacer:

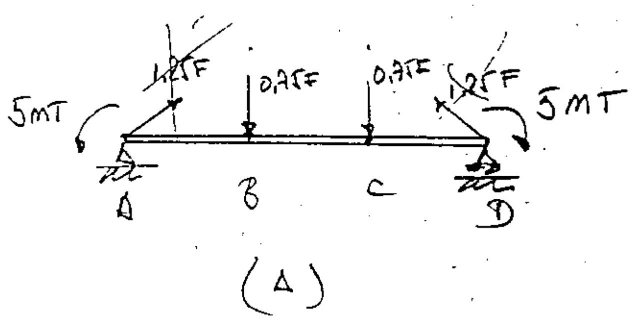
$$\omega_A = \frac{M_A - \gamma_A M_B}{\frac{4EI}{L}(1-\gamma_A\gamma_B)} = \frac{5-0{,}5\times 5}{\frac{4\times 4000}{6}(1-0{,}5\times 0{,}5)} = 1.25\times 10^{-3}\ \text{rad.}$$

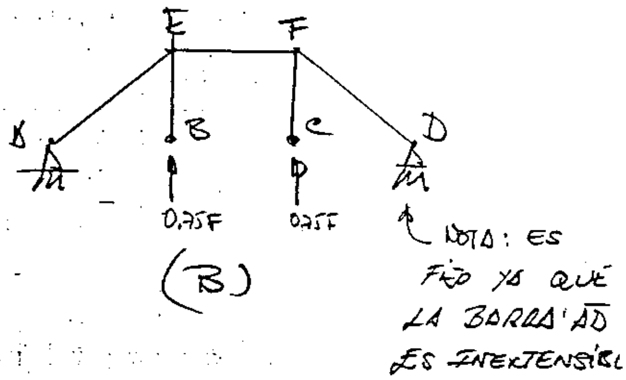
ESTADO ANTIMÉTRICO:

Si se llama $N_{EF} = F$; el equilibrio del nudo E es:



$$\left\{ \begin{array}{l} N_{AE} = 1.25\,F \Rightarrow N_{FD} = 1.25F \\ N_{EC} = -0.75\,F \Rightarrow N_{FC} = -0.75F \end{array} \right.$$



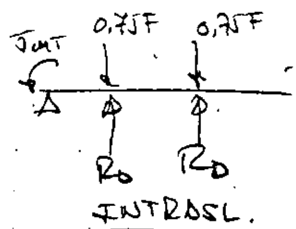


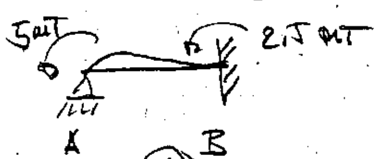
CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD ENTRE AMBAS ESTRUCTURAS ES QUE EL CORRIMIENTO VERTICAL DE B ES EL MISMO.

A) ESTRUCTURA A: (Las cargas de 1,25F se transmiten directamente a los apoyos y por tanto no producen desplazamientos).

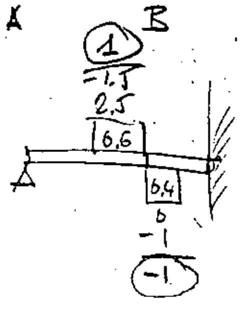
TRASLACIONAL DE GRADO UNO:

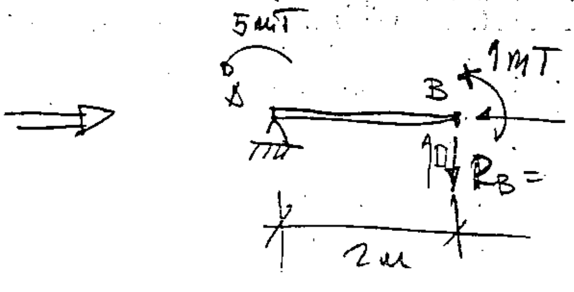
INTRASL: $R_{AB} = \frac{3EI}{L} = 6000\,Tm$; $R_{BC} = \frac{2EI}{L} = 4000\,Tm$ $\Rightarrow$ $r_{AB} = 0$; $r_{BA} = \frac{6000}{6000+4000} = \boxed{0.6}$; $r_{BC} = \frac{4000}{6000+4000} = \boxed{0.4}$





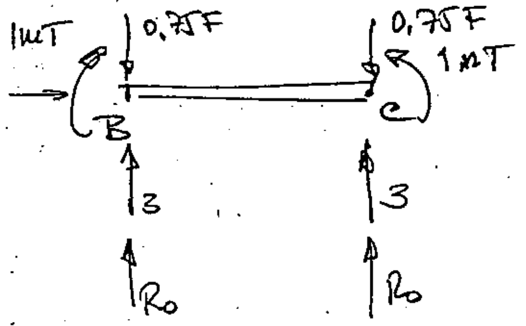
MOM. DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO.





$R_B = \frac{5+1}{2} = 3T$

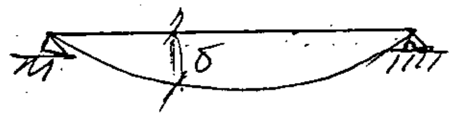
Por tanto en el tramo central BC:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow 2R_0 + 6 = 2 * 0.75F$$

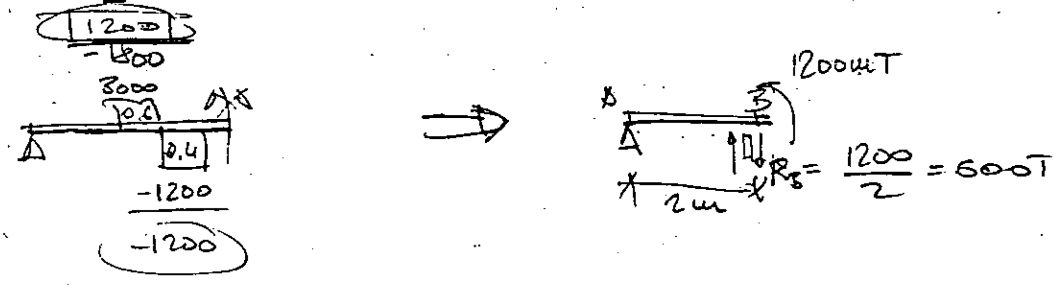
$$\boxed{R_0 = 0.75F - 3}$$

TRASLACIONAL

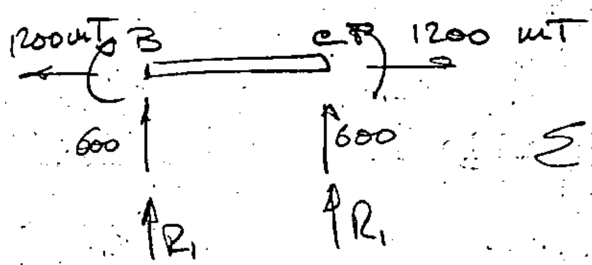


Momento: $\delta = 1$

$$M = \frac{3EJ\delta}{l^2} = \frac{3 * 4000}{2^2} = 3000 \text{ mT}$$



Por tanto en el tramo central:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow 2R_1 + 2 \times 600 = 0$$

$$\boxed{R_1 = -600}$$

CONDICIÓN: $R_0 + \delta R_1 = 0 \Rightarrow 0{,}75F - 3 + \delta(-600) = 0$

$$\boxed{\delta = \frac{0{,}75F - 3}{600}}$$

QUE ES EL CORRIMIENTO VERTICAL DEL NUDO B

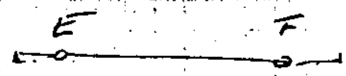
B) * ESTRUCTURA B: ver $\boxed{\text{FIG. (B)}}$

$$\Delta L_{BE} = N_{BE} \frac{L}{EA} = -0.75\,F \frac{1.5}{10000}$$

$$\overset{\uparrow}{v}_B = \overset{\uparrow}{v}_E + 0.75\,F \frac{1.5}{10000} \qquad (*)$$

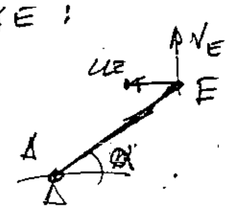
Vamos a calcular v_E:

Por simetría



$$\overleftarrow{u}_E = \frac{1}{2}\Delta L_{EF} = \frac{1}{2} N_{EF} \frac{L}{EA} = \frac{1}{2} F \frac{2}{10000} = 1($$

Barra AE:



$\cos\alpha = 0.8$
$\operatorname{sen}\alpha = 0.6$

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_{AE} &= -\overset{\leftarrow}{u}_E\,0.8 + \overset{\uparrow}{v}_E\,0.6 \\ \Delta L_{AE} &= N_{AE} \frac{L}{AE} = 1.25\,F \frac{2.5}{10000} \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{\uparrow}{v}_E = \frac{1.9625}{3} \times 10^{-3} F$$

Luego sustituyendo en (*) se tiene:

$$\boxed{\overset{\uparrow}{v}_B = \frac{1.9625}{3} \times 10^{-3} F + 0.75\,F \frac{1.5}{1000}}$$

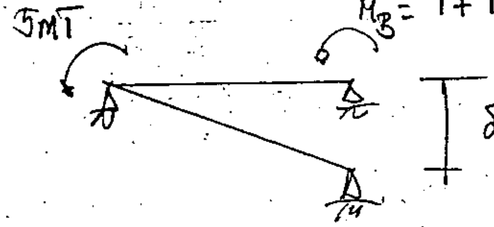
LUEGO POR LA CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD el nudo B se mueve igual en la viga y en la articulada, es decir:

$$\frac{0.75\,F - 3}{600} = \frac{1.9625}{3} \times 10^{-3} F + 0.75\,F \frac{1.5}{1000}$$

$\boxed{F = 2.479\ T}$ QUE ES EL VALOR DE N_{EF}

Para calcular el giro en A:

$$M_B = 1 + 1200\delta = 1 + 1200\left(-1.9 \times 10^{-3}\right) = -1.282 \text{ mT}$$



$$\delta = \frac{0.75F-3}{600} = -1.9 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\omega_A = \frac{5 - 0.5(-1.282)}{\frac{4EI}{L}(1 - 0.5 \times 0.5)} - \frac{\delta}{2} = 1.891 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

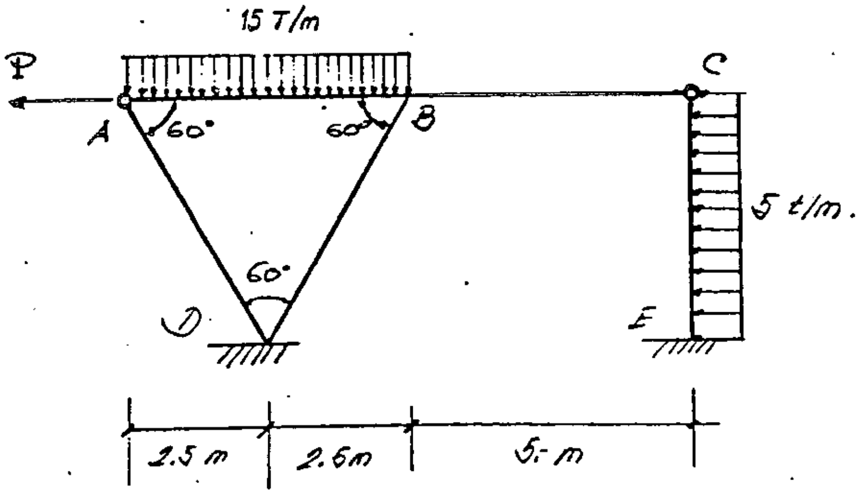
ya que solo es válida la formula para empotrada-empotrada

Portanto el giro total en A es:

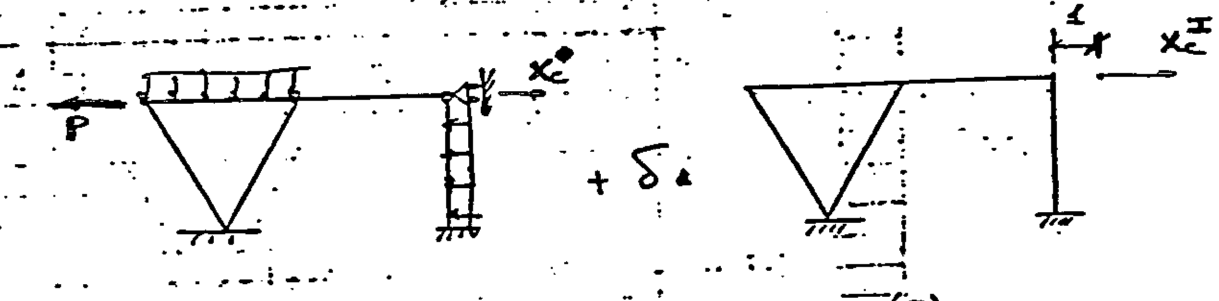
$$\omega_{A_{TOTAL}} = \omega_A^{sim.} + \omega_A^{ANT} = 1.891 \times 10^{-3} + 1.25 \times 10^{-3} = \underline{3.141 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

PROBLEMA .- Calcular cual debe ser el valor de la fuerza horizontal P aplicada en el nudo A de la estructura de la figura para que el movimiento horizontal del dintel ABC sea nulo; además dibujar las leyes de momentos flectores.

Para todas las barras EI = 5000.- m^2T.



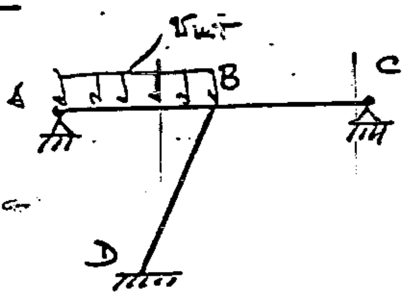
Traslacional de grado 1, por tanto:



$0 = x_c^0 + \delta x_c^I$

No es necesario calcularlo porque en nuestro caso se dice que el desplazamiento horizontal es cero.

ESTADO 0:



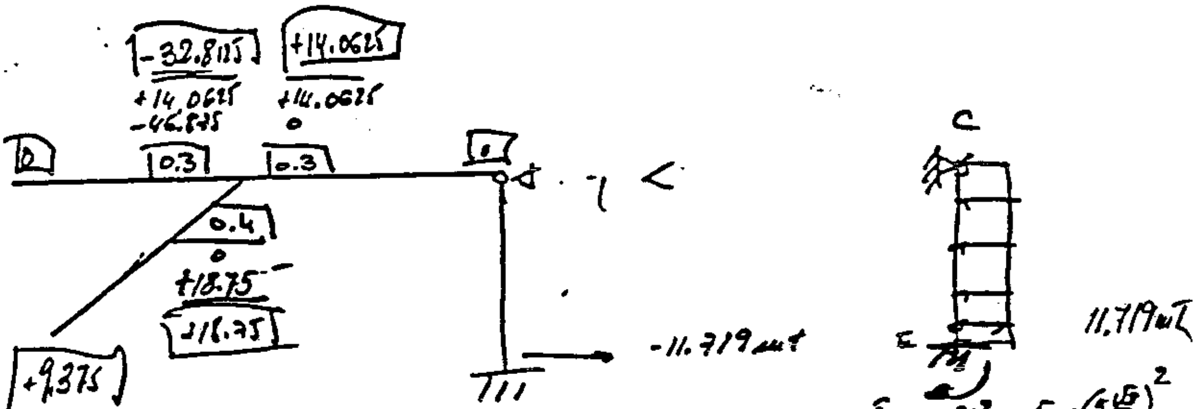
$K_{AB} = \frac{3EI}{L} = K_{BC} = 3000$ mt

$K_{BD} = \frac{4EI}{L} = 4000$ mt

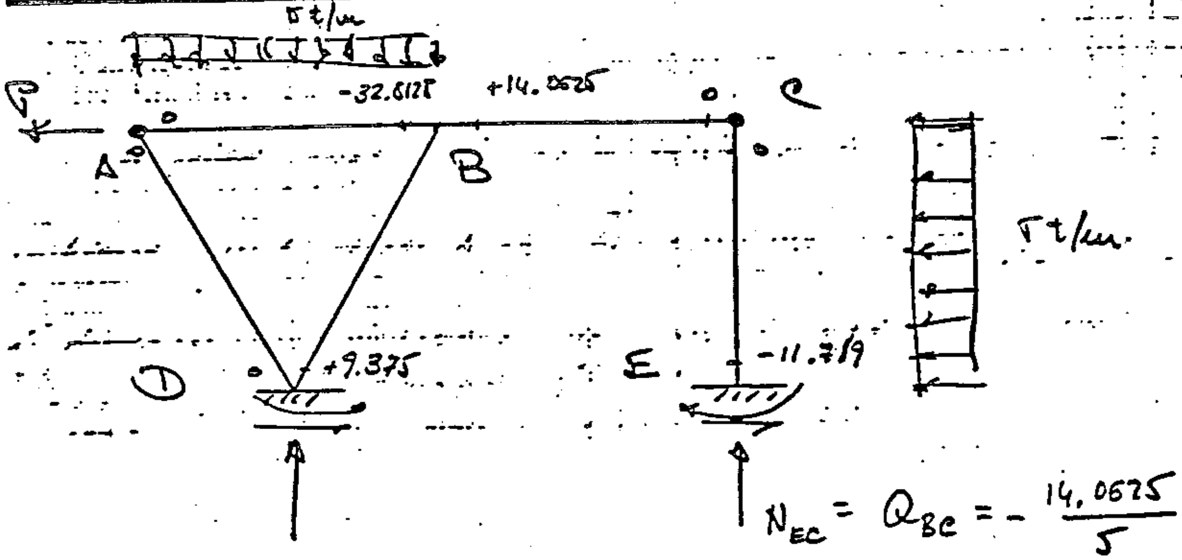
$\Rightarrow$ coeficientes de reparto $\begin{cases} \rho_{BA} = 0.3 \\ \rho_{BC} = 0.3 \\ \rho_{BD} = 0.4 \end{cases}$

Momento de empotramiento: $\overset{0}{M}_B = -\frac{PL^2}{8} = -46.875$ mt.

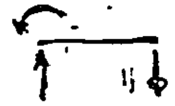
Cross:



$\overset{0}{M}_E = -\frac{PL^2}{8} = -\frac{5 \times \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2}{8} = \cdot /$



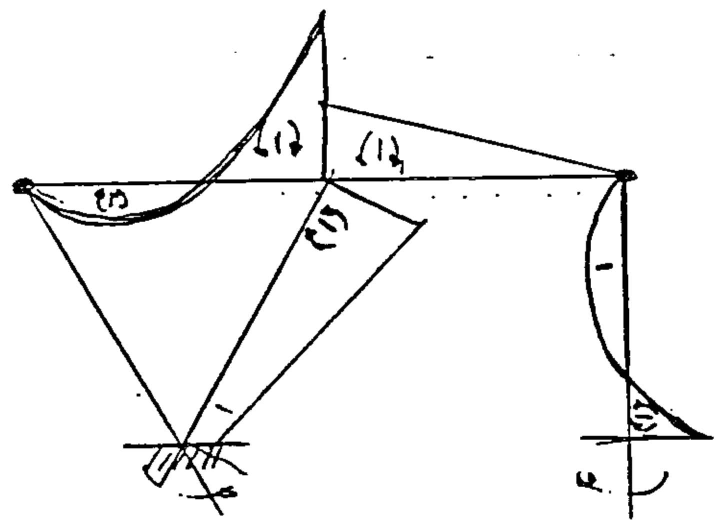
$$N_{EC} = Q_{BC} = -\frac{14.0625}{5} = -2.8125$$



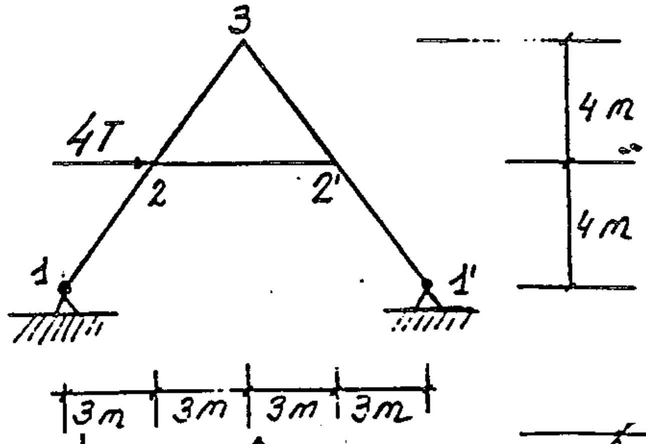
$\boxed{\Sigma M_D = 0}$:

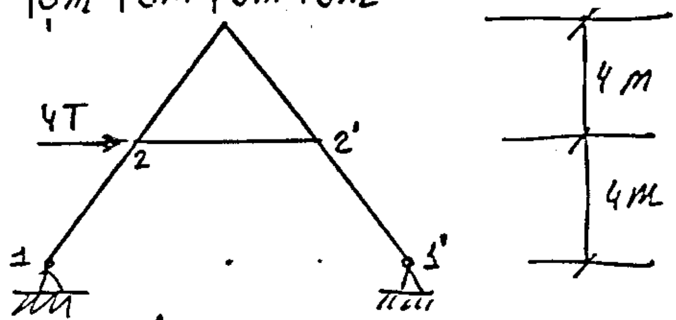
$$P \cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times \frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2.8125 \times 7.5 + 9.375 - 11.719 = 0$$

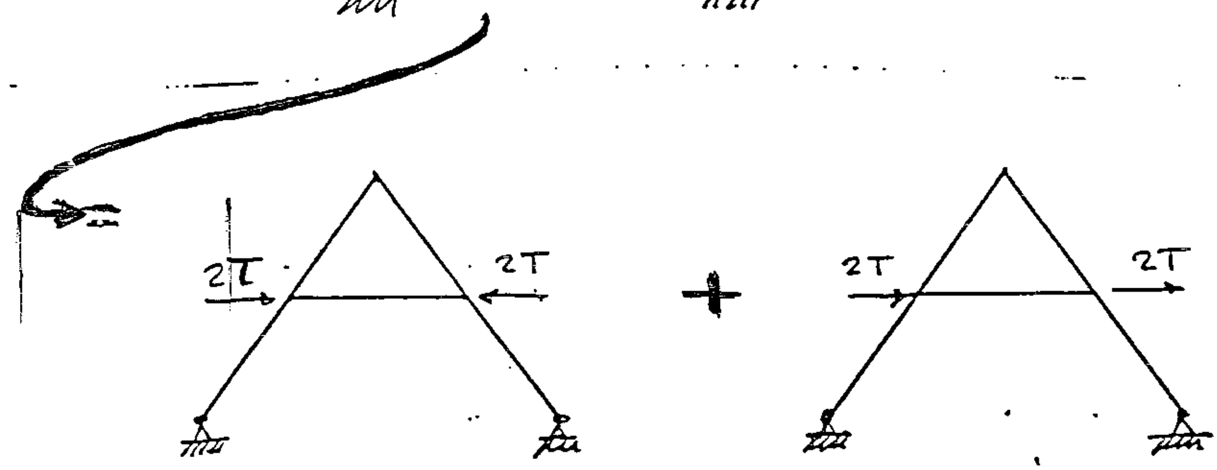
$$\boxed{P = -5.4126\ t}$$



PROBLEMA .-Calcular los movimientos (desplazamientos vertical ,horizontal y giro) del nudo 2 de la estructura representada en la figura ,si se considera que las barras son inextensibles y para todas ellas $EI=5000\ Tm^2$.







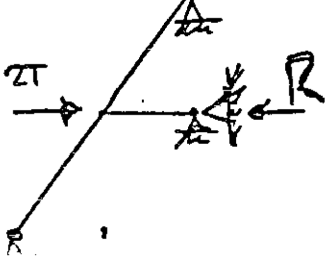
SIMÉTRICA. ANTIMÉTRICA.

SIMÉTRICA:

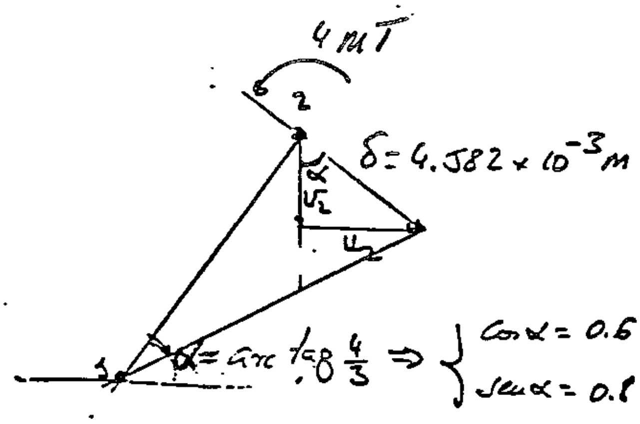
Por simetría es intraslacional, como las barras se suponen inextensibles los desplazamientos de 2 y 2' son nulos. Por tanto se puede prescindir de este estado ya que solo se produce axiles ¡¡y los desplazamientos solo se produce por los flectores y cortantes.

ANTIMÉTRICA:

* INTRASLACIONAL



$\boxed{R=2T}$



$\alpha = \operatorname{arc\,tag} \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0.6 \\ \operatorname{sen}\alpha = 0.8 \end{cases}$

$$M_2 = 873 \times \delta = 873 \times 4.582 \times 10^{-3} = \underline{\underline{= 4 \text{ mT}}}$$

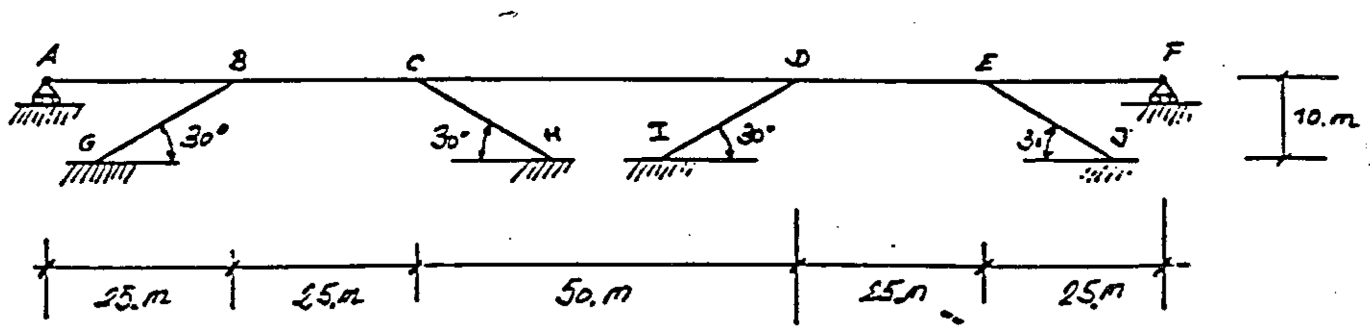
$$\vec{u}_2 = \delta \operatorname{sen}\alpha = \underline{\underline{3.666 \times 10^{-3} \text{ m}}}$$

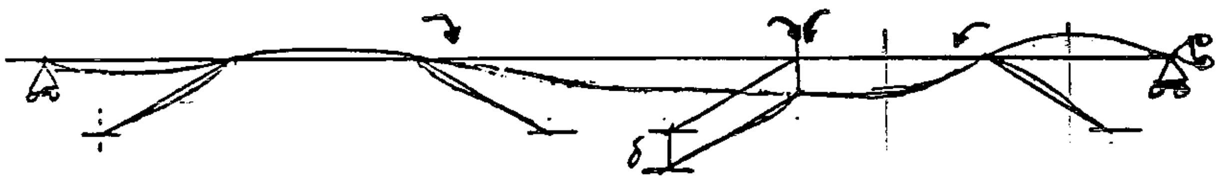
$$v_2 \downarrow = \delta \cos\alpha = \underline{\underline{2.75 \times 10^{-3} \text{ m}}}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\theta_2} = \frac{M_2}{K_a} - \frac{\delta}{L} = \frac{4}{\frac{3 \times 5000}{5}} - \frac{4.582 \times 10^{-3}}{5} = \underline{\underline{4.17 \times 10^{-4} \text{ rad.}}}$$

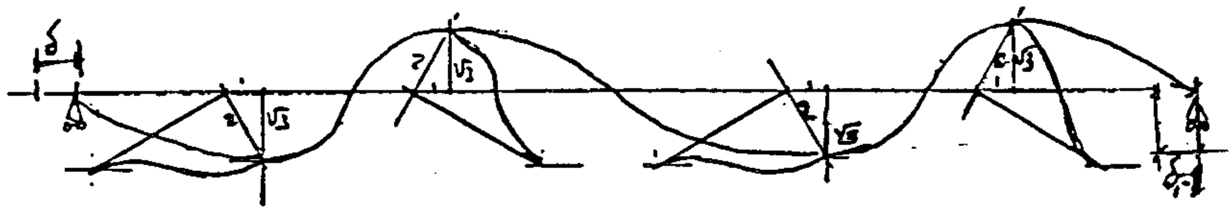
PROBLEMA .-Si el nudo I de la estructura representada en la figura sufre un descenso vertical (sin giro) de "d" metros, calcular la ley de momentos flectores para todas las barras en función del producto "EId".

El valor del módulo de elasticidad es "E" (T/m²) igual para todas las barras; la inercia de todas las barras horizontales es de "2I" (m⁴), siendo su valor de "I" (m⁴) para el resto de las barras (barras inclinadas).





(I)

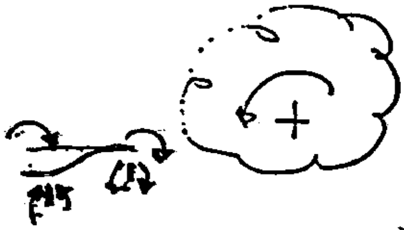


(II)

Condición $\boxed{R_F^{I} + \delta_1 R_F^{II} = 0}$

Calculo de Rigideces y de coeficientes de reparto

NUDO B	NUDO C	NUDO D	NUDO E
$K_{BA} = \frac{3E(2I)}{25} = 0.24EI$	$K_{CB} = \frac{4E(2I)}{25} = 0.32EI$		
$K_{BG} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI$	$K_{CD} = \frac{4E(2I)}{50} = 0.16EI$		
$K_{BC} = \frac{4E(2I)}{25} = 0.32EI$	$K_{CH} = \frac{4E(I)}{20} = 0.2EI$		
$\Sigma = 0.76EI$	$\Sigma = 0.68EI$		
$C_{BA} = 0.316$	$C_{CB} = 0.471$	SIMETRICOS	
$C_{BG} = 0.263$	$C_{CD} = 0.235$		
$C_{BC} = 0.421$	$C_{CH} = 0.294$		



MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO (I) (Intraslacional)

$$M_{DE} = M_{ED} = -\frac{6E(2I)\delta}{(25)^2} = -19.2 \times 10^{-3} EI\delta \ m\cdot T$$

$$M_{DC} = M_{CD} = \frac{6E(2I)\delta}{(50)^2} = 4.8 \times 10^{-3} EI\delta \ m\cdot T$$

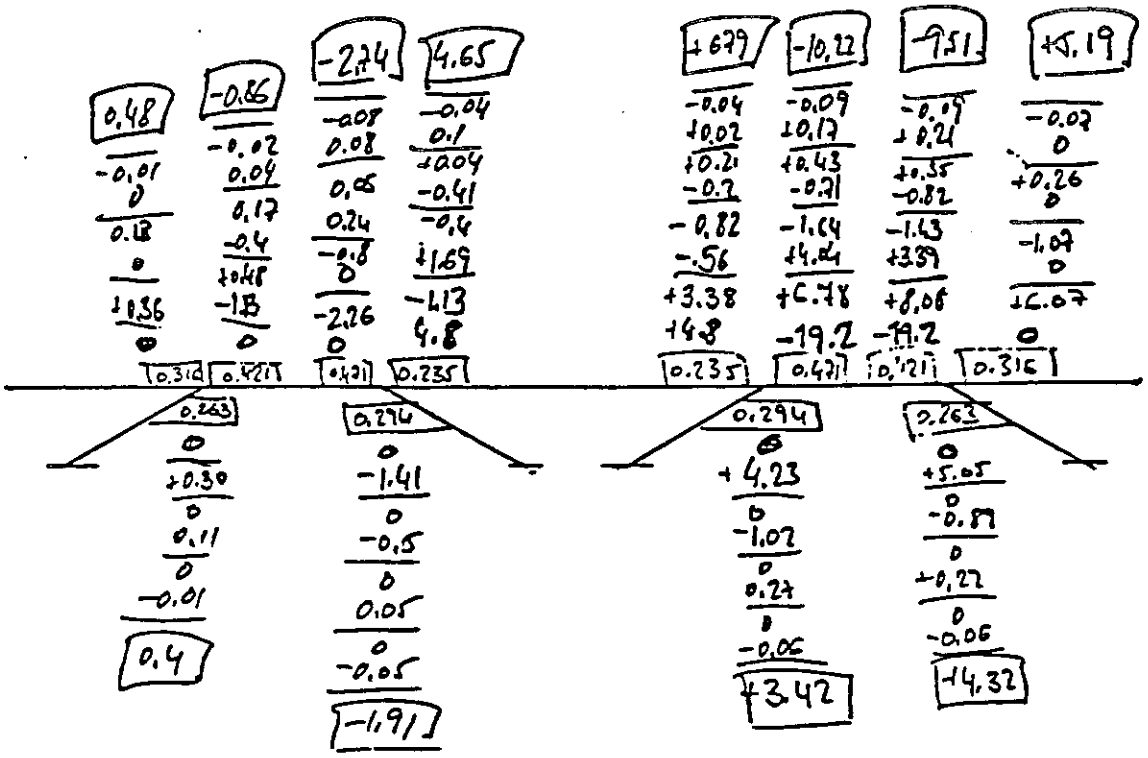
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO (II) (Traslacional).

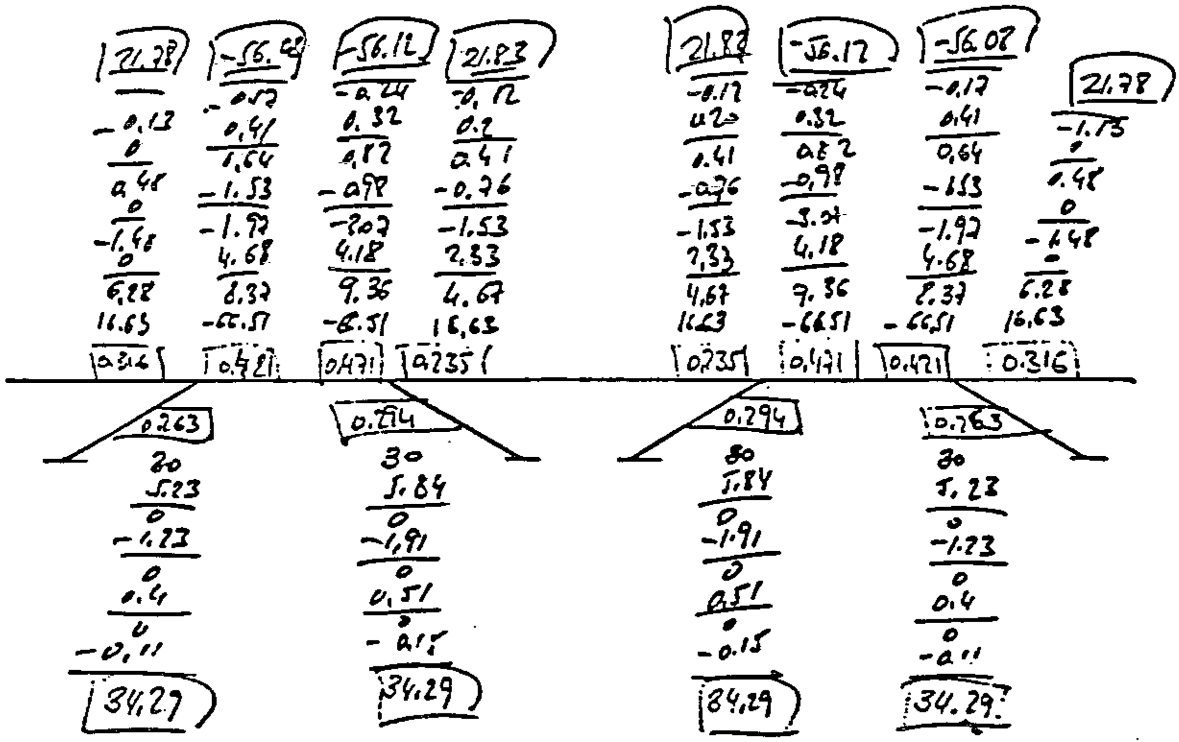
$$M_{BA} = M_{EF} = \frac{3E(2I)\sqrt{3}}{(25)^2} = 16.63 \times 10^{-3} EI \ m\cdot T$$

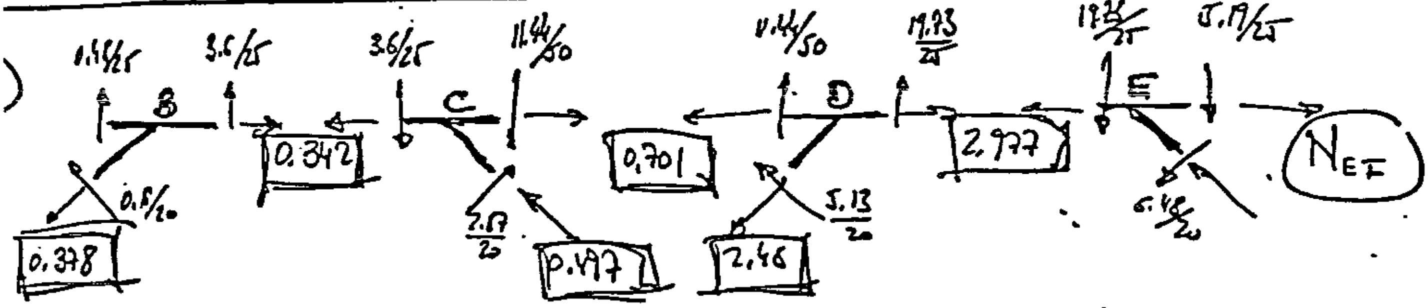
$$M_{EJ} = M_{DI} = M_{CH} = M_{BG} = \frac{6EI\,2}{(20)^2} = 30 \times 10^{-3} EI \ m\cdot T$$

$$M_{DC} = M_{CD} = \frac{6E(2I)2\sqrt{3}}{(50)^2} = 16.63 \times 10^{-3} EI \ m\cdot T$$

$$M_{DE} = M_{ED} = M_{CB} = M_{BC} = -\frac{6E(2I)2\sqrt{3}}{(25)^2} = -66.51 \times 10^{-3} EI \ m\cdot T$$


0.48
-0.86
-2.74
4.65
+6.79
-10.22
-9.51
+5.19
0.4
-1.91
+3.42
-4.32

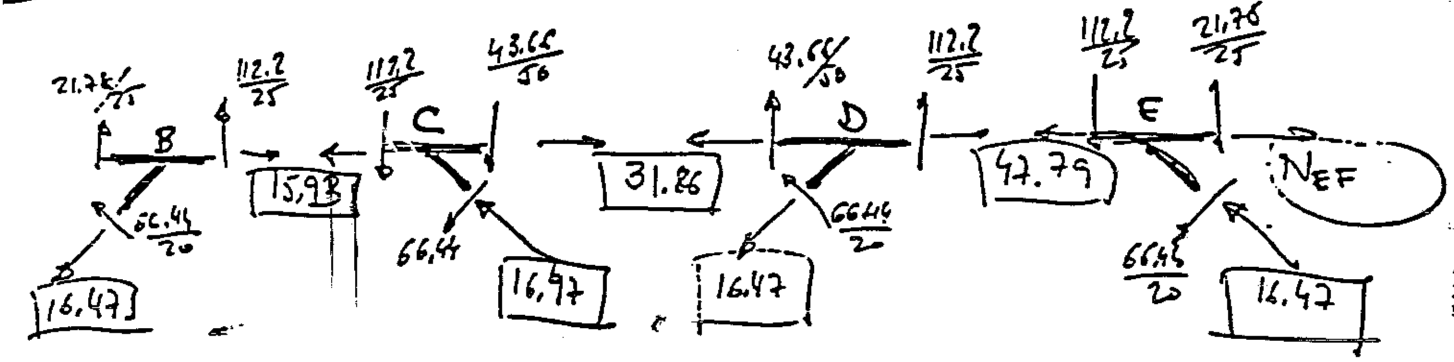

21.78
-56.12
21.83
-56.12
-56.07
21.78
34.27
34.29
34.29
34.29



Por equilibrio salen los valores en los recuadros, obteniendose finalmente: $N_{EF} = 5.352$ T

Por tanto $\boxed{R_F^{I} = 5.352 \times 10^{-3} EI\delta}$

(II)



$N_{EF} = 63.72$ T

Por tanto: $R_F^{II} = 63.72 \times 10^{-3} EI$

Por la condición inicial $R_F^{I} + \delta_1 R_F^{II} = 0$

$$5.352\ 10^{-3} EI\delta + 63.72 \times 10^{-3} EI\delta_1 = 0$$

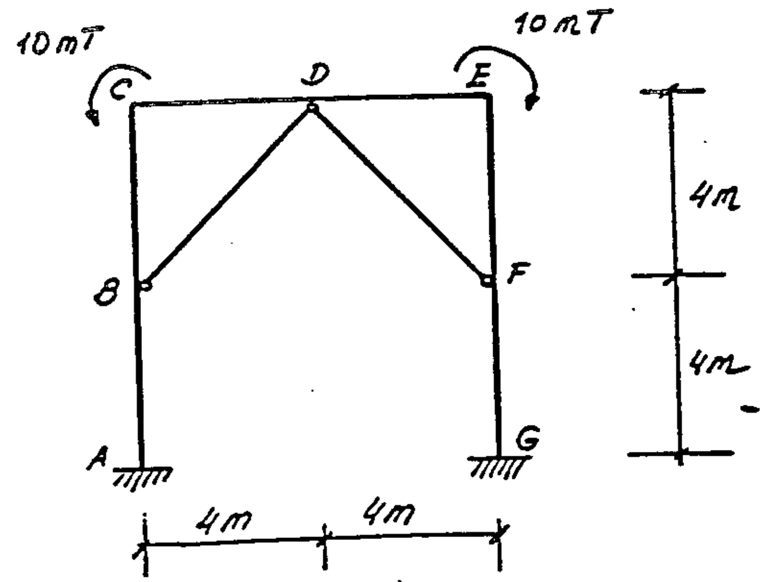
$$\boxed{\delta_1 = -0.084\ \delta}$$

Multiplicando (II) por δ_1 y sumando con (I) se obtienen los momentos.

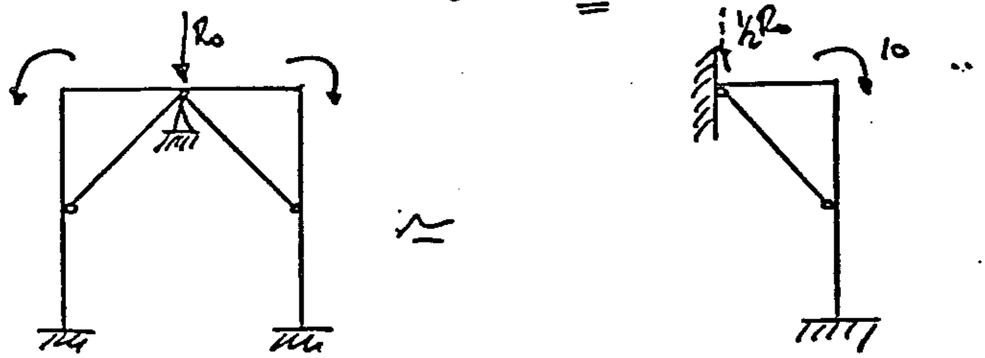
Ej: en A: $0.?? + (-0.084) \cdot 21.76 = -1.35$

Idem. ...

PROBLEMA ___.- Calcular el giro en el nudo E de la estructura simetrica representada en la figura, si se supone que todas las barras son inextensibles y con E·I= 4000. t·m²



ESTADO 0 : INTRASLACIONAL IMPIDIENDO EL MOVIMIENTO VERTICAL DEL NUDO D.

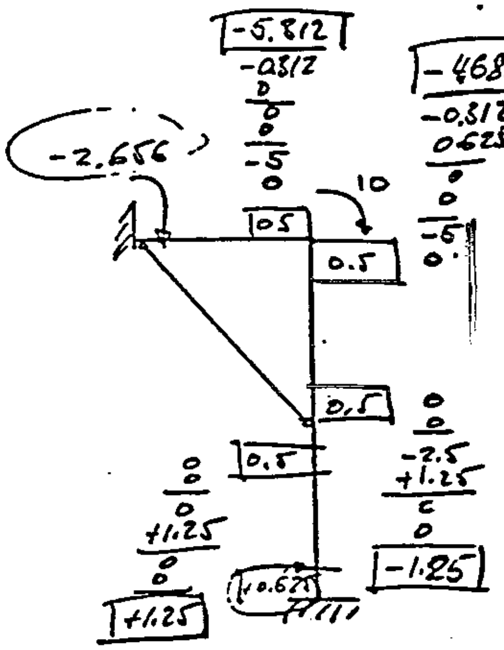


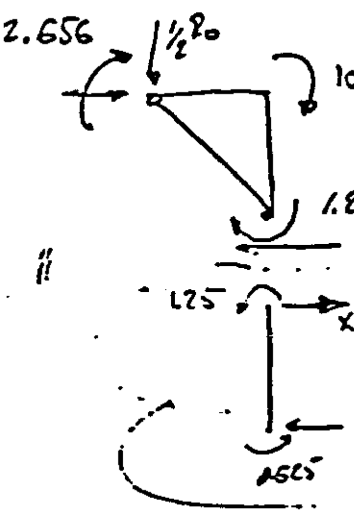
PARA TODAS LAS BARRAS:

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4\times 6000}{4} = 6000 \Rightarrow \text{Coef. de reparto para todas las barras } 0.5$$

CROSS:

(+)



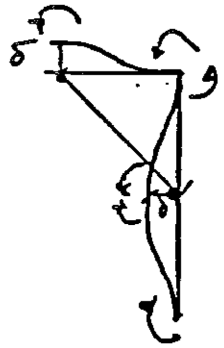


$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10 + 2.656 + 1.25 + .4688 \times 4 = \frac{R_0}{2} 4$$

$$\boxed{R_0 = 7.8906 \text{ T}}$$

$$x = \frac{1.25 + .625}{4} = 0.4688$$

ESTADO I: TRASLACIONAL

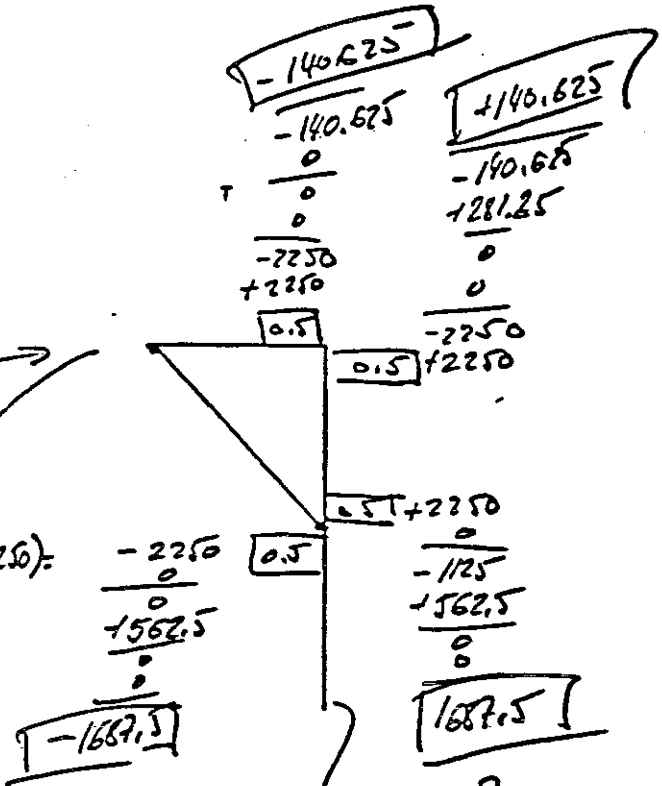


$$M\Big|_{\delta=1} = \frac{6EI\delta}{L^2} = \frac{6 \cdot 6000 \cdot 1}{16} = 2250 \text{ mT}$$

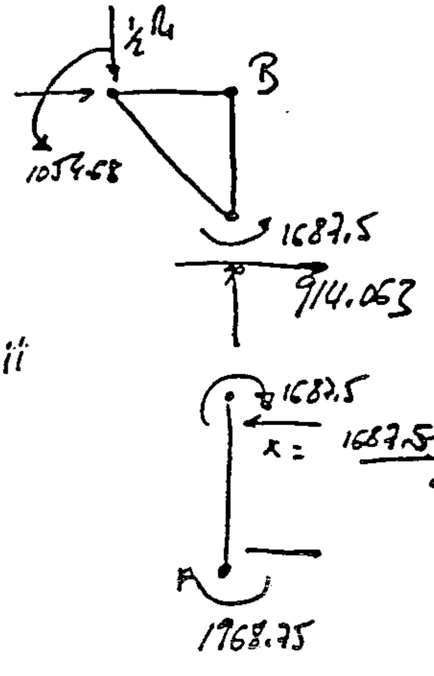
Cross:

$$\theta_1 = \frac{(M_1 - M_1^0) - \gamma_1 (M_2 - M_2^0)}{K_1 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}$$

$$M_1 = M_1^0 + \gamma_1 (M_2 - M_2^0) =$$
$$= 2250 + \frac{1}{2}(140.625 - 2250) =$$
$$= 1054.68$$



$$M_1 = M_1^0 + \gamma_1 (M_2 - M_2^0) =$$
$$= -2250 + \frac{1}{2}(-1687.5 - (2250)) = -1968.75$$



$$\sum M_B = 1054.68 + 1687.5 + 4 \cdot 914.063 + \frac{R_1}{2} 4 = 0$$

$$R_1 = -3199.215$$

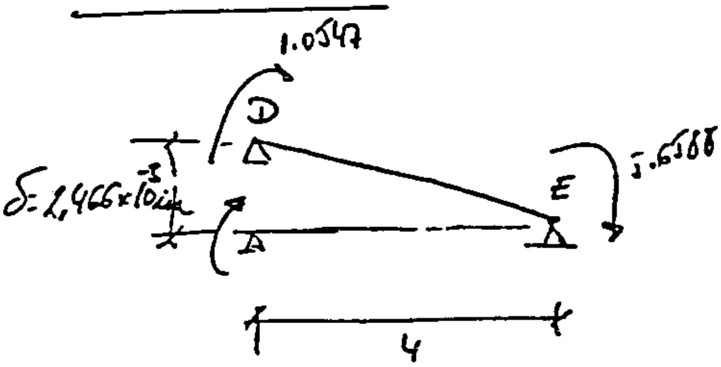
$$x = \frac{1687.5 + 1968.75}{4} = 914.063$$

$$R_0 + \delta R_1 = 0$$

$$7.8906 + \delta(-3199.215) = 0$$

$$\delta = 2.466 \cdot * 10^{-3}\ m.$$

Giro en E:



$$M_D = -2,656 + 2,466 \quad * 10^{-3} * 1054.68 = -0,0547\ mT$$

$$M_E = -5.312 + 2,466 \quad * 10^{-3} * (-140.625) = -5,6588\ mT$$

$$\omega_E = \frac{M_E - \gamma_8 M_D}{\frac{4EI}{L}(1-\gamma_8 \gamma_c)} - \frac{\delta}{L} = \frac{-5.6588 - \frac{1}{2}(-0.0547)}{6000\ (1-0,5*0.5)} - \frac{2.466*10^{-3}}{4} =$$

$$= -1.8679 * 10^{-3}\ rad$$

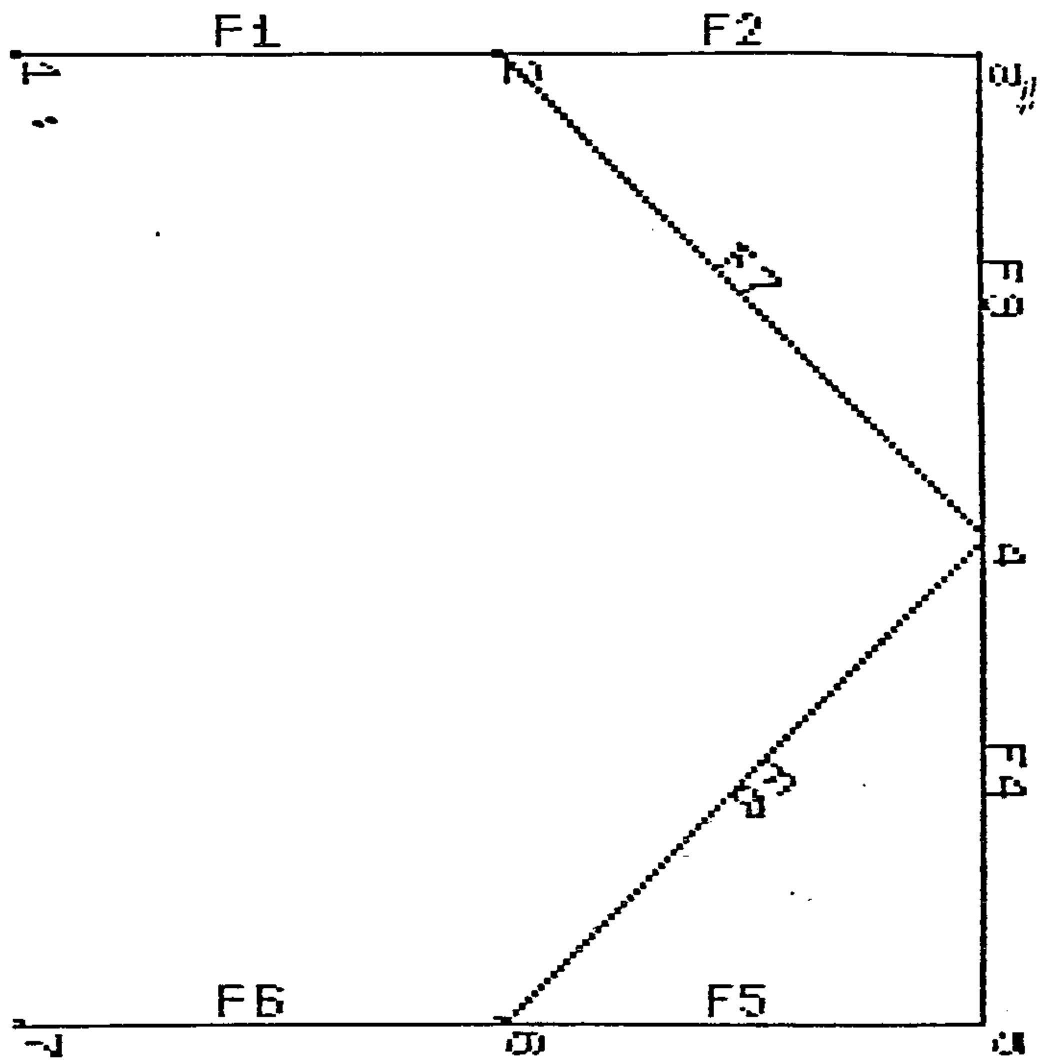
```
?OBLEMA 1
'STEM    P=1
=7   L=1
JINTS
     X=0.          Y=0.          Z=0.
     X=0.          Y=4.          Z=0.
     X=0.          Y=8.          Z=0.
     X=4.          Y=8.          Z=0.
     X=8.          Y=8.          Z=0.
     X=8.          Y=4.          Z=0.
     X=8.          Y=0.          Z=0.

ESTRAINS
.7,1            R=0,0,1,1,1,0
                R=1,1,1,1,1,1
                R=1,1,1,1,1,1

RAME
1=1
     A=1.E15   I=3.     E=2.1E7
     1     2   M=1      LP=1,0
     2     3   M=1      LP=1,0
     3     4   M=1      LP=1,0
     4     5   M=1      LP=1,0
     5     6   M=1      LP=1,0
     6     7   M=1      LP=1,0
     2     4   M=1      LP=1,0   LR=1,1
     4     6   M=1      LP=1,0   LR=1,1

JADS
     L=1   F=,,,,,10.
     L=1   F=,,,,,-10.
JRCES
      C=1.
```

Para evitar sing. de la mult. por 10^4 ⇒ Resultados por 10^{-4}



SAP80

FILE : PROB1

UNDEFORMED GEOMETRY

X

PROBLEMA 1
SAP80 V85.02

* *
* * * *   J O I N T   D I S P L A C E M E N T S   * * * *
* *

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	R(Z)
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	.2480E-06	.1060E-22	-.4625E-07
3	.2760E-08	-.2603E-21	.1829E-06
4	.2760E-08	.2452E-06	-.7961E-10
5	.2760E-08	-.2662E-21	-.1826E-06
6	-.2425E-06	.3991E-23	.4513E-07
7	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

R E A C T I O N S   A N D   A P P L I E D   F O R C E S

LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	M(Z)
1	-1.8370	-.0557	4.4023
2	-.0319	-.0319	.0000
3	.0502	.0000	10.0000
4	.0670	.1205	.0000
5	.0017	.0000	-10.0000
6	-.0670	.0045	.0000
7	1.7981	-.0210	-4.3070
TOTAL	-.1883E-01	.1652E-01	.9530E-01

EMA 1
V85.02

* *
* * F R A M E   M E M B E R   F O R C E S * * * * * *
* *

COMBINATION MULTIPLIERS

LOAD	OLD LOAD CONDITION
OMB.	1
1	1.000

ERS WITH NUMBERS BETWEEN 1 & 32000

LOAD R	AXIAL FORCE	DIST I	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT	1-3 PLANE SHEAR	1-3 PLANE MOMENT	AXIAL TORQUE
1	.06						
		.0	1.84	-4.40			
		4.0	1.84	2.95			
1	-1.42						
		.0	.33	2.95			
		4.0	.33	4.27			
1	.00						
		.0	1.42	-5.73			
		4.0	1.42	-.04			
1	.00						
		.0	-1.42	-.04			
		4.0	-1.42	-5.71			
1	-1.42						
		.0	-.35	4.29			
		4.0	-.35	2.89			
1	.02						
		.0	-1.80	2.89			
		4.0	-1.80	-4.31			
1	50126569.56						
		.0	.00	.00			
		5.7	.00	.00			
1	24480417.69						
		.0	.00	.00			
		5.7	.00	.00			

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

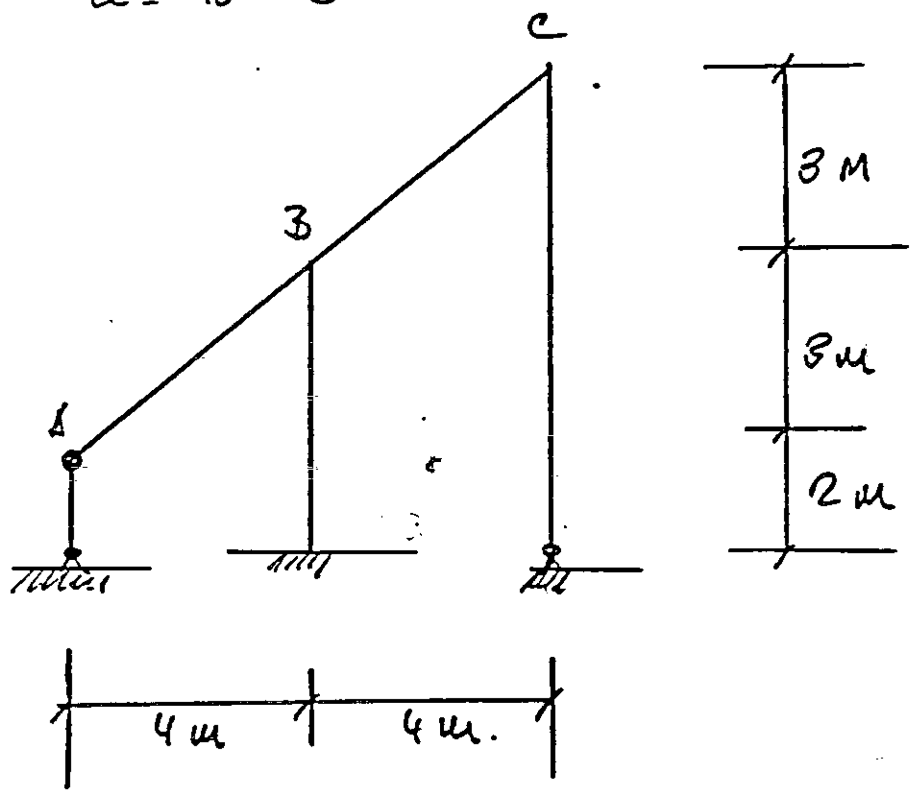
PROBLEMA:

Calcular el movimiento horizontal del nudo A de la estructura representada en la figura, si la barra ABC sufre un incremento de temperatura de 40°C.

DATOS: $E = 2 \times 10^6 \; T/m^2$

$I = 1.6 * 10^{-3} \; m^4$

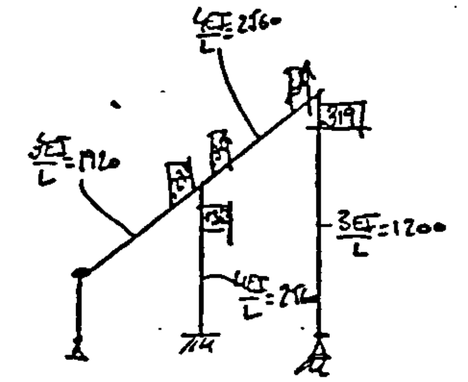
$\alpha = 10^{-5} \; °C^{-1}$

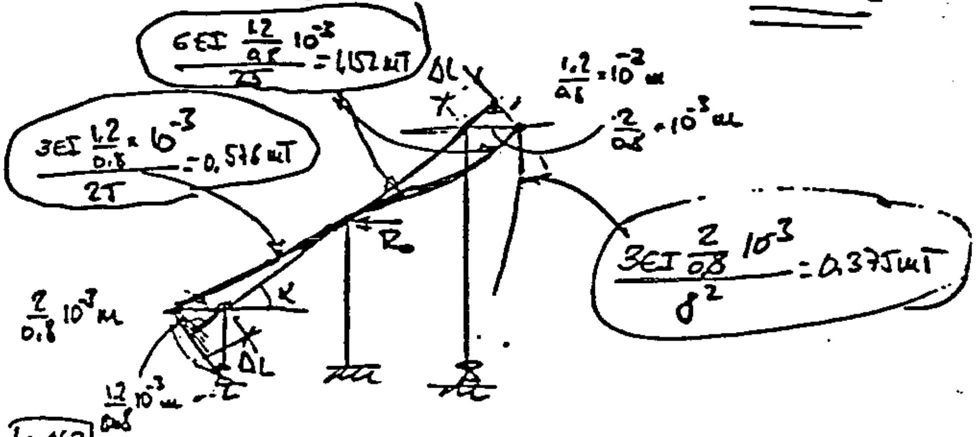


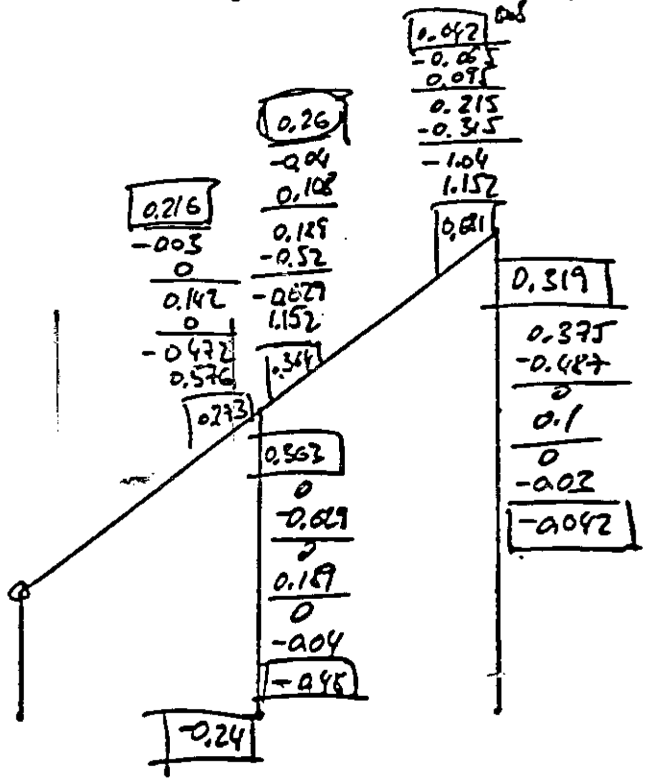
ESTRUCTURA TRASLACIONAL DE GRADO 1:

INTRASLACIONAL:

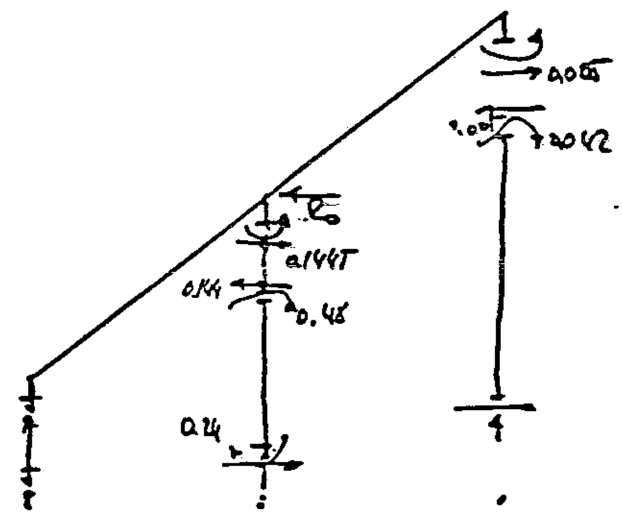
$\Delta L = L \alpha \Delta T = 5 \times 10^{-5} \times 40 = 2 \times 10^{-3}$ m







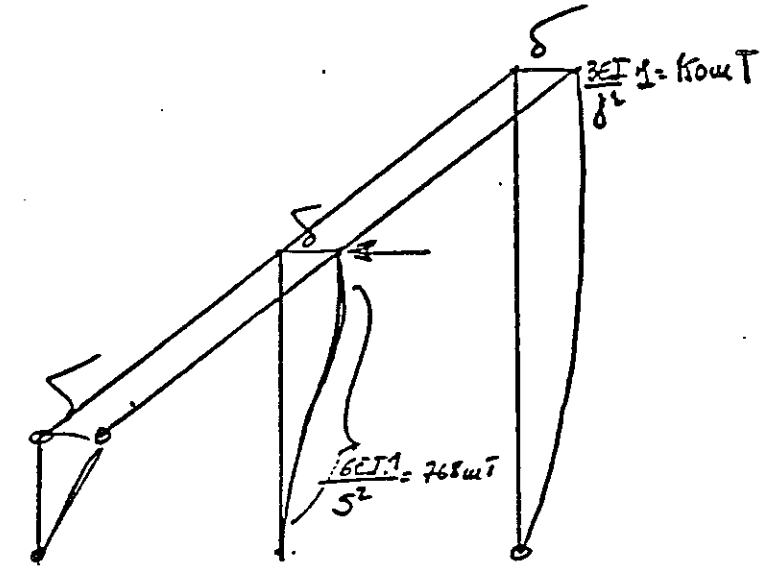
⇒

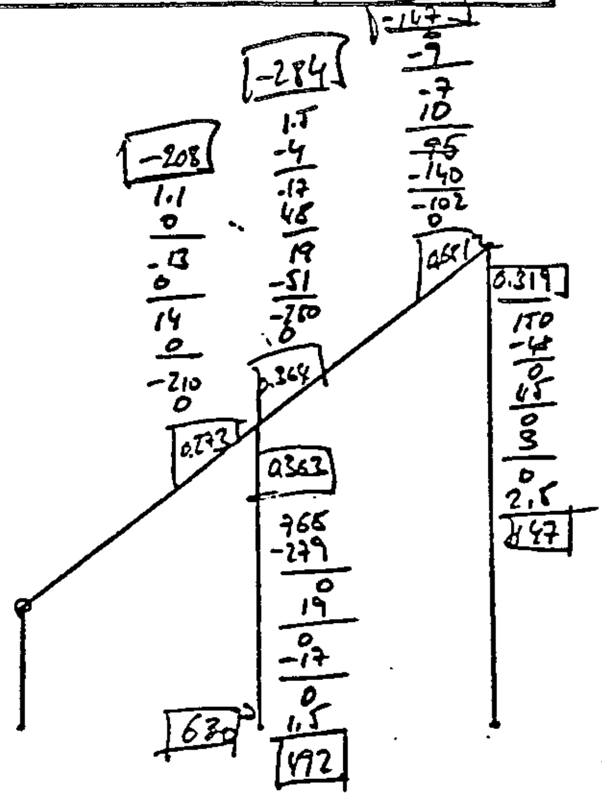


$\sum F_H = 0 \Rightarrow 0.144 + 0.005 - R_o = 0$

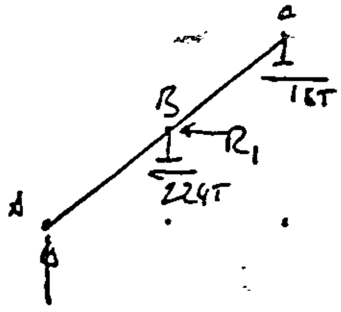
$\boxed{R_o = 0.149T}$

TRASLACIONAL:





Realizando un corte igual al del traslacional, se obtiene de forma análoga:



$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \quad 224 + 18 + R_1 = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 = -242T}$$

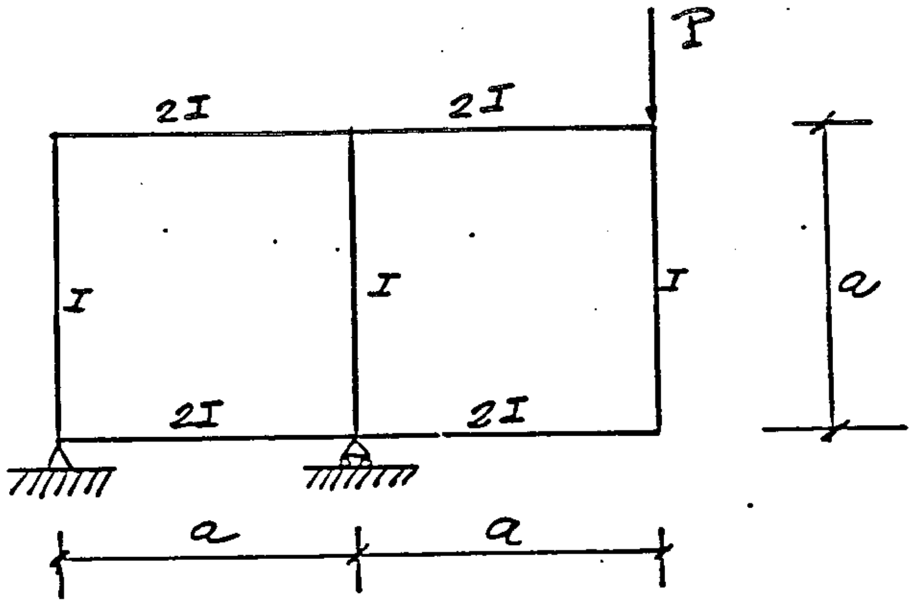
POR TANTO:

$$R_0 + \delta R_1 = 0$$

$$0.149 + \delta(-242) = 0 \quad \Rightarrow \delta = 0.6157 \cdot 10^{-3}\,m$$

$$\boxed{\overleftarrow{u_A} = \frac{2}{0.8} \times 10^{-3} - 0.6157 \times 10^{-3} = 1.3843 \times 10^{-3}\,m}$$

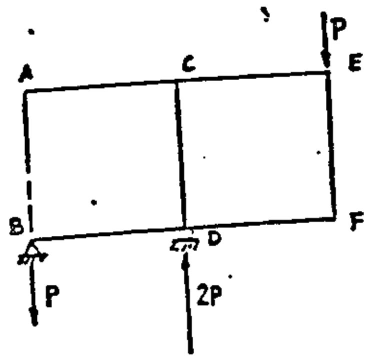
PROBLEMA .-Calcular las leyes de momentos flectores , esfuerzos cortantes y axiles en la estructura representada en la figura que se encuentra sometida a las cargas que se indican.



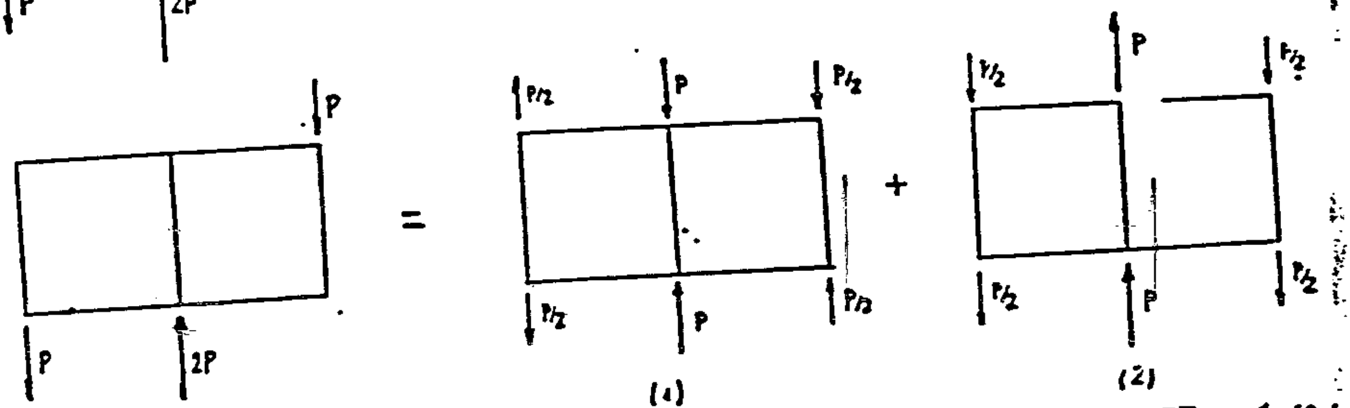
CALCULO DE ESTRUCTURAS
Curso 77-78

PRACTICA nº 20

De la misma forma que en la práctica anterior. transformamos la estructura en un cuadro. y aplicamos simetria y antimetria teniendo que posteriormente compatibilizar deformaciones

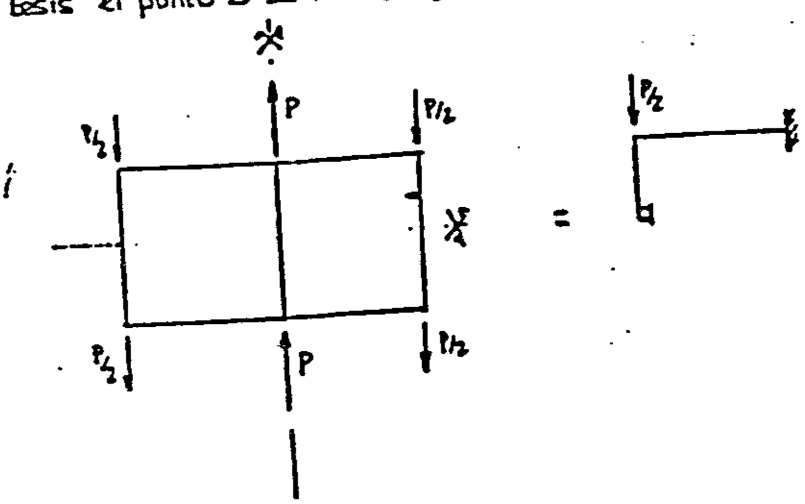


El calculo de reacciones es inmediato. y transformamos la estructura en un cuadro sustituyendo las coacciones por su acción sobre la estructura

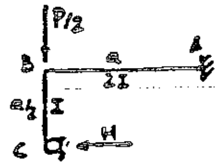


El estado (1) produce una tracción en AB de P/2 y en CD de P. En EF produce compresión de P/2.

El estado (2) es simetrico de forma y simetrico de carga respecto al eje vertical; antimetrico de carga respecto al eje horizontal. Para su resolución suponemos fijos los puntos y por tanto posteriormente habra que compatibilizar deformaciones dado que bajo esta hipotesis el punto B se mueve y en realidad no es asi.



Estructura que es hiperestatica grado 1 y que vamos a resolver por Castigliano.

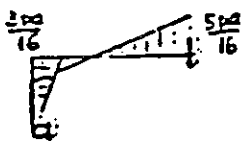


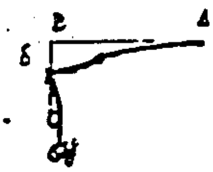
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_{f_{CB}} &= Hy \\ \mathcal{M}_{f_{BA}} &= H\frac{a}{2} - \frac{P}{2}x \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta H} = 0 = \int_{cd}^{ef} \mathcal{M}\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial H}\frac{ds}{EI} = \int_0^{a/2} Hy^2\frac{dy}{EI} + \int_0^a \left(H\frac{a}{2} - \frac{P}{2}x\right)\frac{a}{2}\frac{dx}{E2I}$$

$$\frac{H}{EI}\int_0^{a/2} y^2\,dy + \frac{a}{8EI}\int_0^a (Ha - Px)\,dx = 0 \qquad H\left[\frac{a^3}{24}\right] + \frac{a}{8}\left[Hax - \frac{Px^2}{2}\right]_0^a = 0$$

$$H\frac{a^3}{24} + \frac{a}{8}\left(Ha^2 - \frac{Pa^2}{2}\right) = 0 \qquad \frac{4Ha^3}{24} - \frac{Pa^3}{16} = 0 \qquad \underline{H = \frac{3}{8}P}$$





Vamos a calcular δ por ecuaciones elasticas

$$M_{BA} = -M = \frac{4E2I}{a}\varphi - \frac{6E2I\delta}{a^2} = \frac{8EI}{a}\varphi - \frac{12EI\delta}{a^2}$$

$$M_{BC} = +M = \frac{3EI}{a/2}\varphi = \frac{6EI}{a}\varphi$$

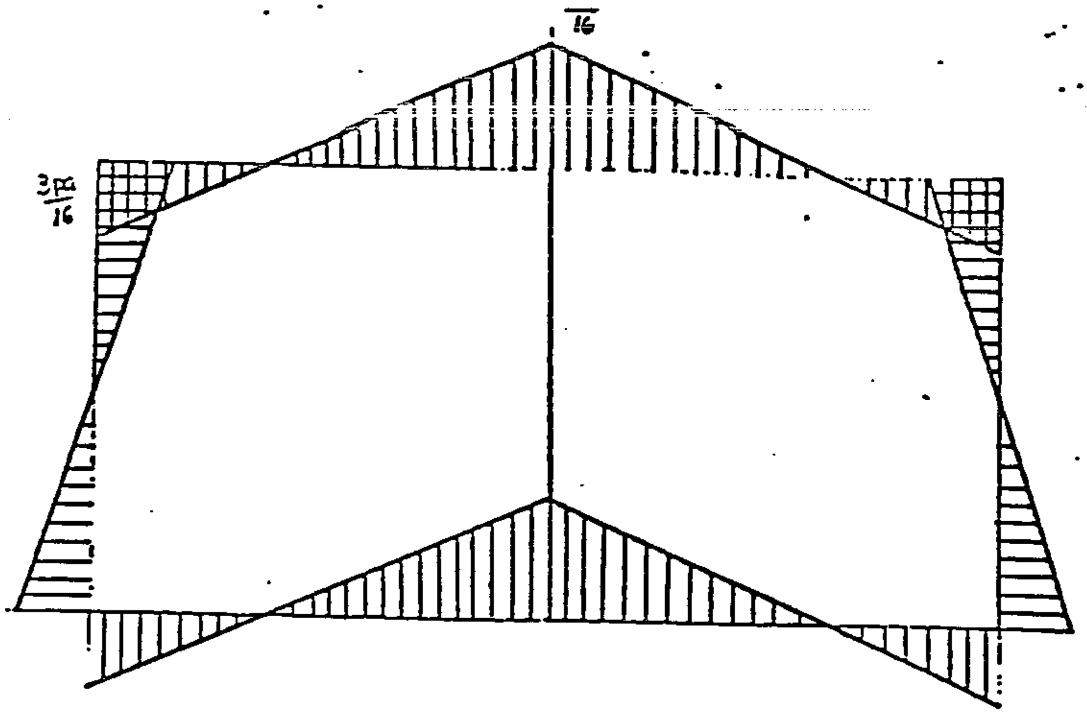
$$+3M = -\frac{24EI}{a}\varphi + \frac{36EI\delta}{a^2}$$

$$4M = \frac{24EI}{a}\varphi$$

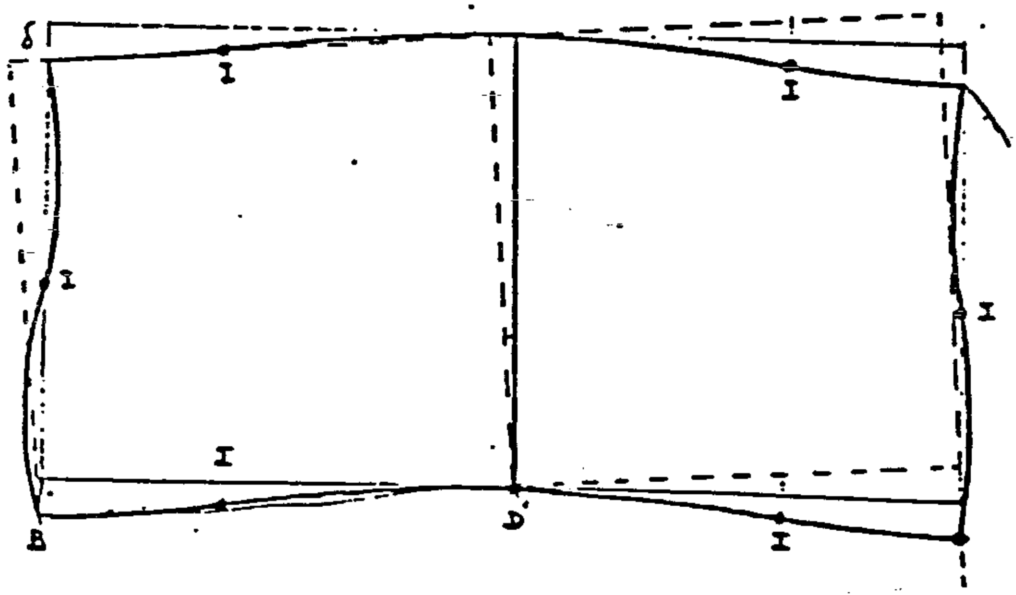
$$7M = \frac{36EI\delta}{a^2} \qquad \delta = \frac{7Ma^2}{36EI}$$

Aunque en este caso no es necesario el calculo preciso de δ dado que no se pide el corrimiento de ningun punto, hemos realizado el calculo como en la prob. anterior

A partir de lo calculado podemos dibujar la ley de $\mathcal{M}_f$. teniendo en cuenta la simetria y la antimetria volviendo sobre los pasos realizados. A la vista de esta ley y conociendo el sentido de δ podremos dibujar la deformada (o estima) del cuadro



LEY DE M_4



Para encontrar la deformada real, sabemos que B y D son fijos y estan situados en la misma horizontal para lo que ó bien giramos la deformada un angulo determinado por $tg\alpha = \alpha = \frac{\delta}{d}$ o bien referimos esta deformada a la estructura construida a partir de B y D. (linea de puntos).

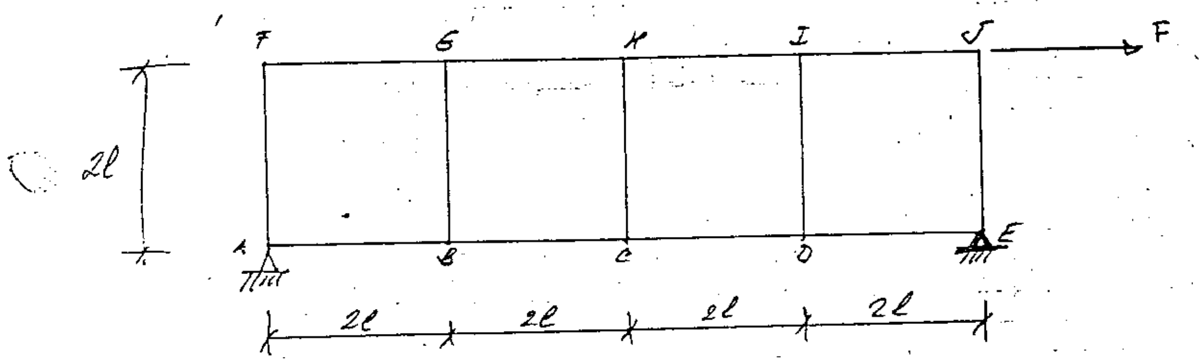
PROBLEMA . Calcular la fuerza F a que está sometida la estructura de la figura para que el giro en el nudo G sea de θ radianes.

Datos: Inercia de las barras horizontales =I

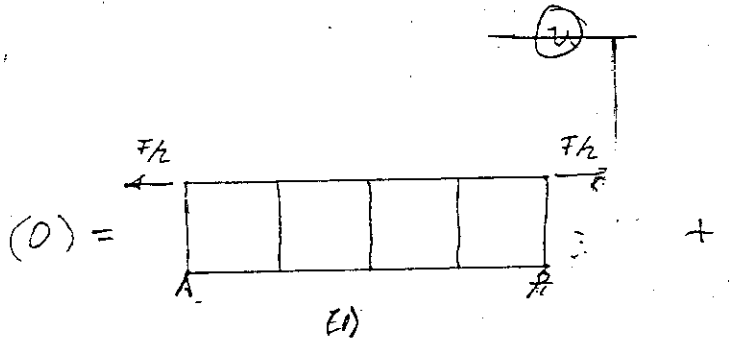
Inercia de las barras $\overline{AF}$ y $\overline{EJ}$ =I

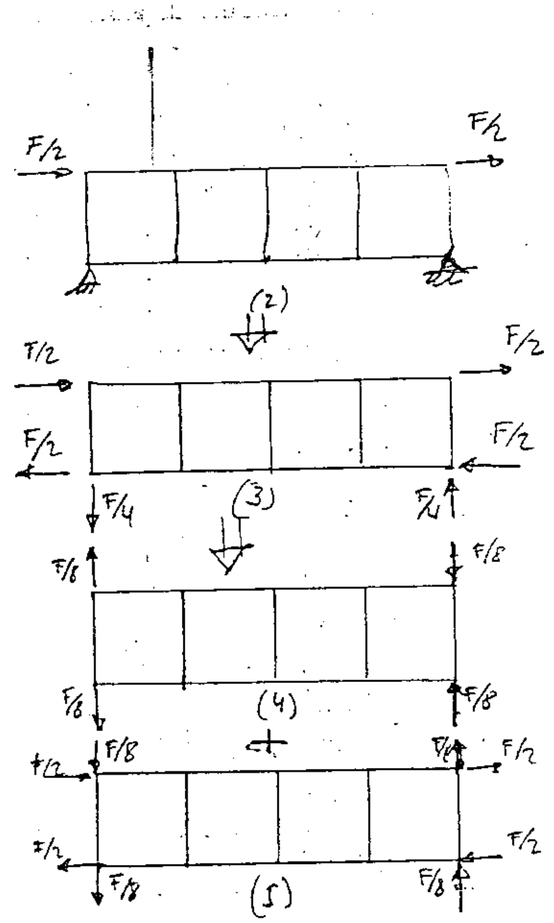
Inercia del resto de las barras verticales=2I

Nota:La resolución se irá realizando mediante la sucesiva superposición de estados simétrico y antisimétrico.



(0)



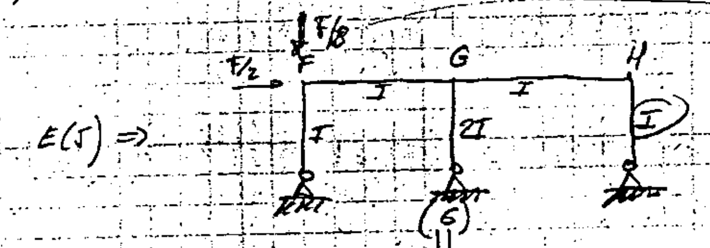


E(1) Tracción en las barras superiores de valor F/2

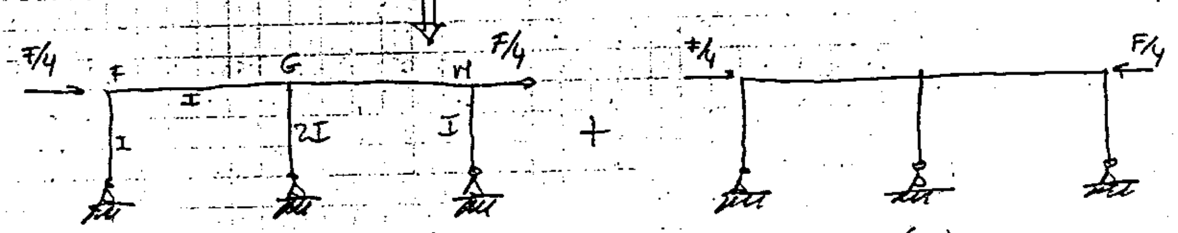
E(4) Tracción en $\overline{AF}$ y $\overline{EJ}$ de valor $\frac{F}{8}$

Queda el $E(5)$: Considerando como puntos fijos el centro de EF y EJ, por la doble simetría

$E(5) \Rightarrow$

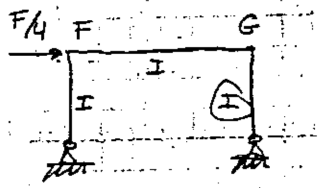


produce una compresión pero no afecta a momentos

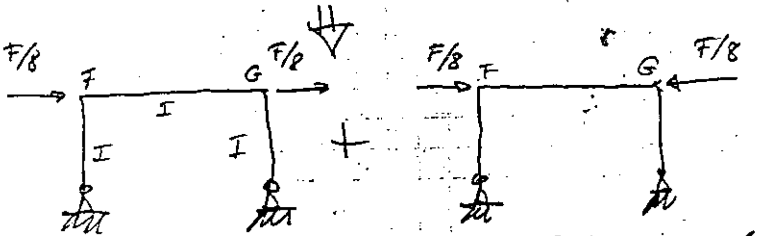


(7) (8)

$E(8) \rightarrow$ produce compresión de $F/4$ en las barras FG y GH

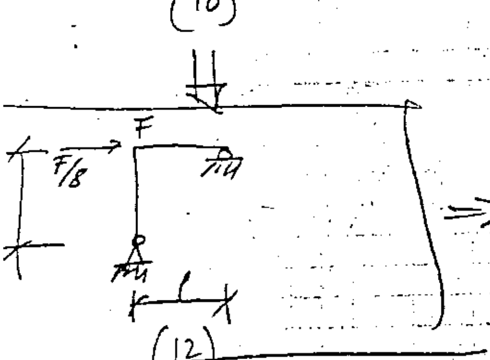


(9)

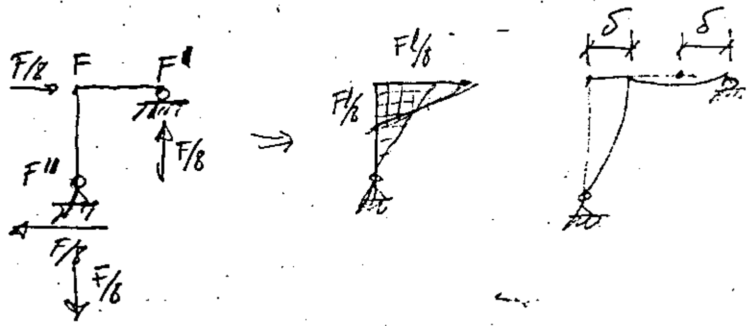


(10) (11)

$E(11) \rightarrow$ Produce una compresión de $F/8$ en FG



(12)



$$M_{FF'} = -M = \frac{3EI}{l}\varphi_F$$

$$M_{FF''} = M = \frac{3EI}{l}\varphi_F + \frac{3EI\,\delta}{l^2}$$

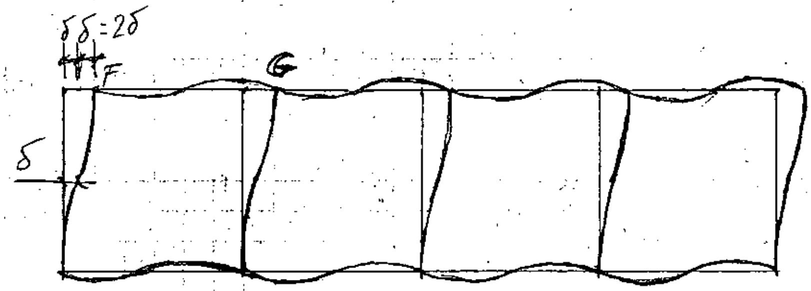
(Ref.) $2M = \dfrac{3EI\,\delta}{l^2}$

$$2\frac{Fl}{8} = \frac{3EI}{l^2}\delta$$

$$\delta = \frac{Fl^3}{12EI}$$

$$\frac{Fl}{8} = \frac{3EI}{l}\varphi_F + \frac{3EI}{l^2}\frac{Fl^3}{12EI} \Rightarrow \varphi_F = -\frac{Fl^2}{24EI}$$

La deformada será



$$\varphi_G = \theta = \varphi_F = \frac{Fl^2}{24EI}$$

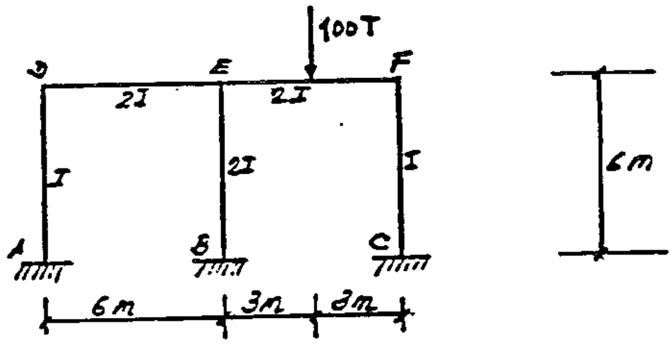
$$\boxed{F = \frac{24EI\theta}{l^2}}$$

PROBLEMA . Dibujar las leyes de momentos flectores para todas las barras de la estructura representada en la figura, si todas ellas se consideran inextensibles excepto la $\overline{BE}$.

Datos: Las inercias se indican en la figura, siendo $I=10^{-2}\ m^4$.

El area de la sección transversal de la barra $\overline{BE}$ es $A=0.04\ m^2$

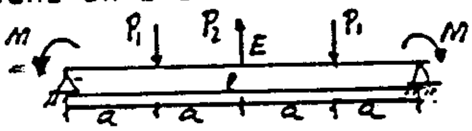
$E=2\times10^{6}\ T/m^2$



Nota: El momento de empotramiento perfecto para la barra de la figura es

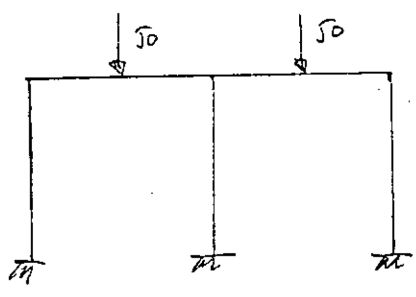
$$\hat{M}=\frac{P_1 a}{l}(l-a)-\frac{P_2 l}{8}$$

La flecha en E de la estructura de la figura es

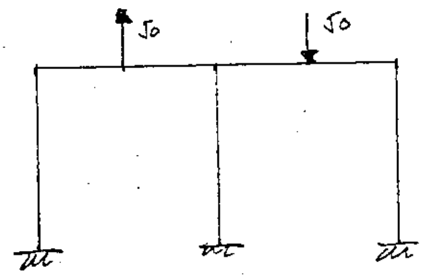


$$V_E=\frac{P_1 a}{24EI}(3l^2-4a^2)-\frac{P_2 l^3}{48EI}-\frac{M l^2}{8EI}$$

(0) =

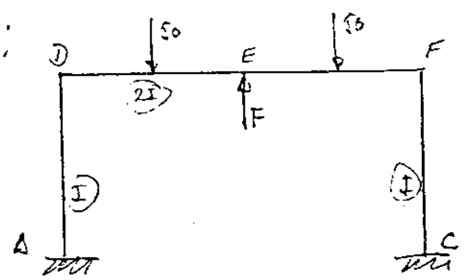


(1)



(2)

ESTADO(1):



Condición:

$$V_E = \frac{F\, l_{BE}}{E A_{BE}}$$

Momento de empotramiento perfecto en DF: $\mathring{M}_{DF}$

$$\mathring{M}_{DF} = \frac{50\ l/2}{2l}\left(2l-\frac{l}{2}\right) - \frac{F\,2l}{8} = \frac{150\,l}{8} - \frac{Fl}{4} = \underline{112.5 - 1.5F}$$

$$M_{DF} = \mathring{M}_{DF} + \frac{2E(2I)}{2l}\varphi_D = \mathring{M}_{DF} + \frac{EI}{3}\varphi_D$$

$$M_{DA} = \frac{4EI}{l}\varphi_D = \frac{2EI}{3}\varphi_D$$

Equilibrio del nudo D:

$$\mathring{M}_{DF} + \frac{EI}{3}\varphi_D + \frac{2EI}{3}\varphi_D = 0 \Rightarrow \varphi_D = -\frac{\mathring{M}_{DF}}{EI}$$

Luego:

$$M_{DF} = \mathring{M}_{DF} - \frac{\mathring{M}_{DF}}{EI}\frac{EI}{3} = \frac{2}{3}\mathring{M}_{DF}$$

$$M_{DA} = -\frac{2EI}{3}\frac{\mathring{M}_{DF}}{EI} = -\frac{2}{3}\mathring{M}_{DF}$$

La flecha en E es:

$$V_E = \frac{50\times 3}{24EI}\left(3\,\overline{12}^2 - 4\times 3^2\right) - \frac{F\,\overline{12}^3}{48EI} - \frac{M_{DF}\overline{12}^2}{8EI} = \frac{2475}{EI} - \frac{36F}{EI} - \frac{18M_{DF}}{EI} =$$

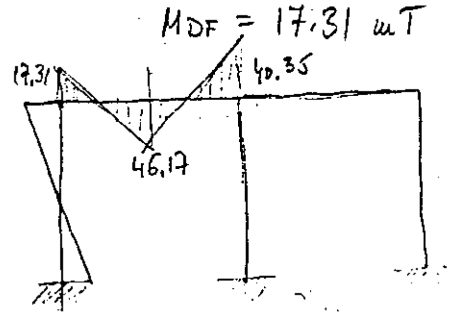
$$= \frac{2475}{EI} - \frac{36F}{EI} - \frac{12\mathring{M}_{DF}}{EI} = \frac{2475}{EI} - \frac{36F}{EI} - \frac{12}{EI}(112.5 - 1.5F) =$$

$$= \frac{1125}{\cancel{E}I} - \frac{18F}{\cancel{E}I} = \frac{F\,l_{EB}}{EA_{BE}} = \frac{F\,6}{\cancel{E}A}$$

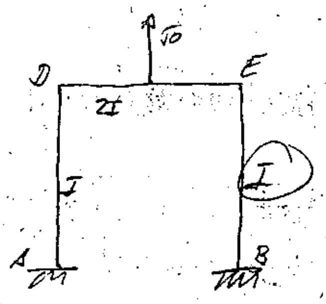
$$112500 - 1800F = F\,150 \Rightarrow \boxed{F = 57.69\ T}$$

Por tanto: $\mathring{M}_{DF} = 25.965\ mT$

$M_{DF} = 17.31\ mT$



ESTADO (2): Antisimétrico $\Rightarrow$ el pilar central no trabaja a axil.



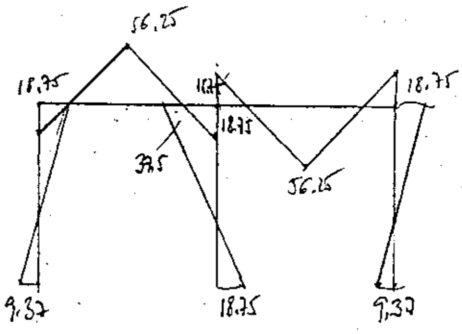
$$\overset{\circ}{M}_{DE} = -\frac{50 \times 6}{8} = -37.5 \text{ mT}$$

$$M_{DA} = \frac{4EI}{l}\varphi_D = \frac{2EI}{3}\varphi_D$$

$$M_{DE} = \overset{\circ}{M}_{DE} + \frac{2E(2I)}{l}\varphi_D = -37.5 - \frac{2EI}{3}\varphi_D$$

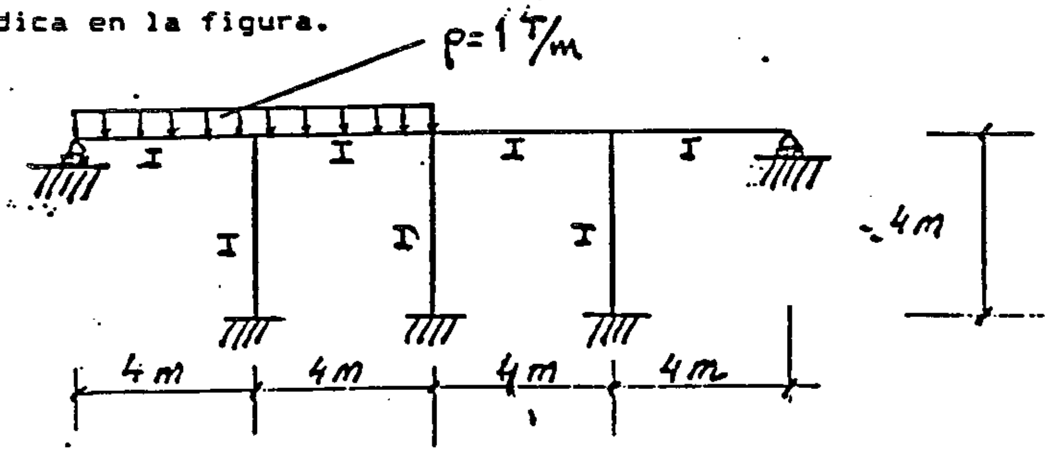
Equilibrio de D: $-37.5 - \frac{4EI}{3}\varphi_D = 0$; $\varphi_D = -\frac{112.5}{4EI}$

$$M_{DA} = -\frac{2EI}{3}\,\frac{112.5}{4EI} = -18.75 \text{ mT}$$



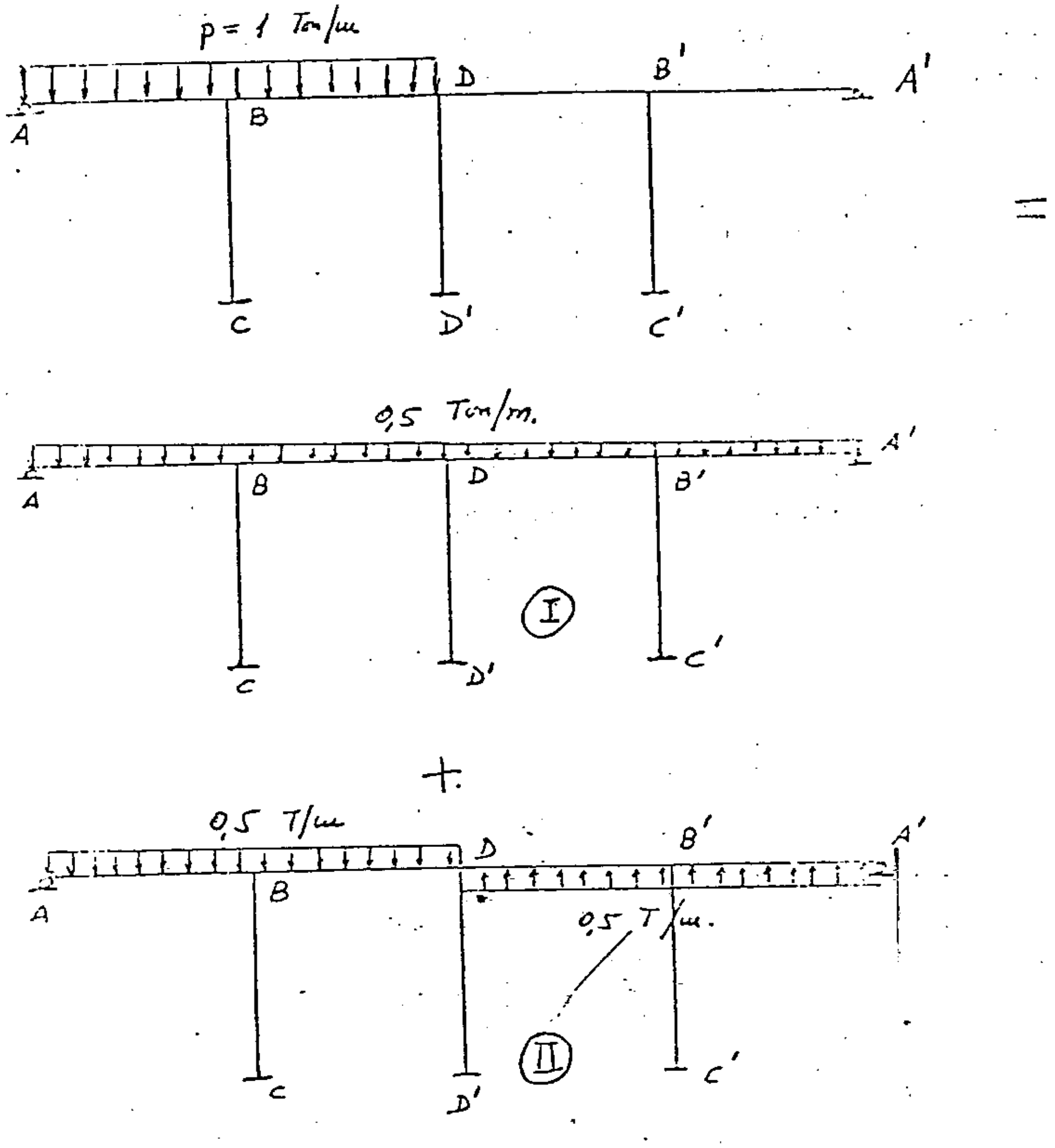
TOTAL es la suma de los dos estados.

PROBLEMA ..—Calcular las leyes de momentos flectores en todas las barras de la estructura representada en la figura, si todas ellas son del mismo material y su sección recta es constante con el mismo momento de inercia, tal y como se indica en la figura.



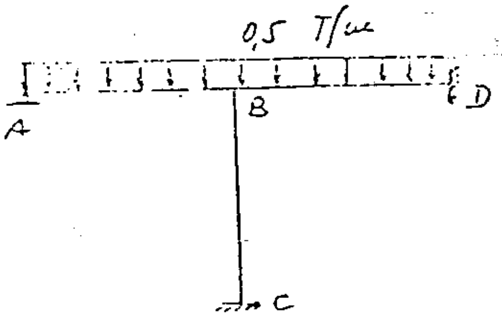
la izquierda —

Descomponemos el pórtico en simétrico y antimétrico.



a) Pórtico simétrico I:

Al ser el pórtico I simétrico en cuanto a geometría y a cargas, es intraslacional. El punto D no gira ni se desplaza. Por tanto, podemos reducir el pórtico a:



$$M^{I}_{BD} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_B + 0) + \frac{0{,}5 \times (4)^2}{12} = EI\varphi_B + 0{,}667$$

$$M^{I}_{BA} = \frac{3EI}{4}\varphi_B - \frac{0{,}5 \times (4)^2}{8} = 0{,}75\, EI\varphi_B - 1$$

$$M^{I}_{BC} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_B + 0) + 0 = EI\varphi_B$$

$$\sum M_B^{I} = 0 = 2{,}75\, EI\varphi_B - 0{,}333$$

$$EI\varphi_B = 0{,}121$$

Sustituyendo:

$M^{I}_{BD} = 0{,}788$ mT

$M^{I}_{BA} = -0{,}909$ mT

$M^{I}_{BC} = 0{,}121$ mT

$M^{I}_{CB} = \frac{M^{I}_{BC}}{2} = 0{,}061$ mT

$M^{I}_{DB} = \left| \frac{2EI}{4}(0 + \varphi_B) - \frac{0{,}5 \times 4^2}{12} = -0{,}607 \right|$ mT

$M^{I}_{DB'} = +0{,}607$ mT

$M^{I}_{B'D} = -0{,}788$ mT

$M^{I}_{B'A'} = 0{,}909$ mT

$M^{I}_{B'C'} = -0{,}121$ mT

$M^{I}_{C'B'} = -0{,}061$ mT.

b) Pórtico antimétrico II: Observemos no obstante dicho pórtico se desplaza. debido a la antimetría $\varphi_B = \varphi_{B'}$ y que el zamiento horizontal de los tres pilares es el

Aplicamos las Ecuaciones elásticas:

$$M^{II}_{BA} = \frac{3EI}{4}\varphi_B - \frac{0,5\times 4^2}{8} = 0,75 EI\varphi_B - 1$$

$$M^{II}_{BC} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_B + 0) + \frac{6EI\delta}{4^2} = EI\varphi_B + 0,375\, EI\delta$$

$$\sum M^{II}_B = 0 = \boxed{2,75\, EI\varphi_B + 0,5\, EI\varphi_D - 0,333 + 0,375\, EI\delta}$$ * 1ª Ec.

$$M^{II}_{DB} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_D + \varphi_B) - \frac{0,5\times 4^2}{12} = EI\varphi_D + 0,5\, EI\varphi_B - 0,667$$

$$M^{II}_{DB'} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_D + \varphi_B) - \frac{0,5\times 4^2}{12} = EI\varphi_D + 0,5\, EI\varphi_B - 0,667$$

$$M^{II}_{DD'} = \frac{2EI}{4}(2\varphi_D + 0) + \frac{6EI\delta}{4^2} = EI\varphi_D + 0,375\, EI\delta$$

$$\sum M^{II}_D = 0 = \boxed{EI\varphi_B + 3EI\varphi_D + 0,375\, EI\delta - 1,333}$$ * 2ª Ec.

Por ser el pórtico antimétrico, si aplicáramos las ecuaciones elásticas a las barras que concurren al nudo B' nos encontraríamos otra vez con la primera ecuación. Hay que establecer el equilibrio de cortantes: Cortando los tres pilares, obtenemos que:

$$T_{BC} + T_{DD'} + T_{B'C'} = 0 \qquad \text{o sea:}$$

$$\frac{M^{II}_{BC} + M^{II}_{CB}}{4} + \frac{M^{II}_{DD'} + M^{II}_{D'D}}{4} + \frac{M^{II}_{B'C'} + M^{II}_{C'B'}}{4} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M^{II}_{B'C'} &= M^{II}_{BC} \\ M^{II}_{C'B'} &= M^{II}_{CB} \end{aligned}\right\} \text{ Por antimetría}$$

$$M^{II}_{CB} = \frac{2EI}{4}(0 + \varphi_B) + \frac{6EI\delta}{16} = 0,5\, EI\varphi_B + 0,375\, EI\delta$$

$$M^{II}_{D'D} = \frac{2EI}{4}(0 + \varphi_D) + \frac{6EI\delta}{16} = 0,5\, EI\varphi_D + 0,375\, EI\delta$$

Sustituyendo:

$$\boxed{3EI\varphi_B + 1,5\, EI\varphi_D + 2,25\, EI\delta = 0}$$ * 3ª Ecuación

$$\boxed{\begin{aligned} EI\varphi_B &= 0,0962 \\ EI\varphi_D &= 0,4674 \\ EI\delta &= -0,4398 \end{aligned}}$$

Sustituyendo, queda:

$M^{II}_{BD} = 0,9969$ mT

$M^{II}_{BA} = -0,9279$ mT.

$M^{II}_{BC} = -0,0687$ mT

$M^{II}_{CB} = -0,1168$ mT.

$M^{II}_{DB} = -0,1515$ mT.

$M^{II}_{DB'} = -0,1515$ mT.

$M^{II}_{B'D} = M^{II}_{BD} = 0,9969$ mT.

$M^{II}_{B'A'} = M^{II}_{BA} = -0,9279$ mT.

$M^{II}_{B'C'} = M^{II}_{BC} = -0,0687$ mT.

$M^{II}_{C'B'} = M^{II}_{CB} = -0,1168$ mT

$M^{II}_{D'D} = 0,0688$ mT.

$M^{II}_{DD'} = 0,3025$ mT.

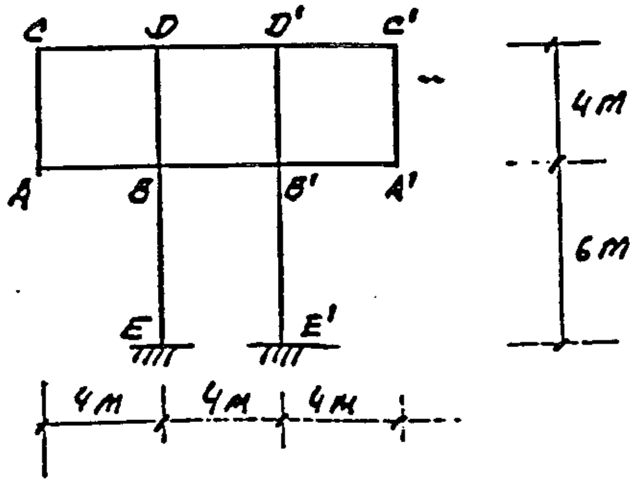
Sumando ~~estos~~ momentos con los anteriores, obtendremos los momentos totales

$M_{BD} = 1,785$ mT	$M_{B'A'} = -0,019$ mT.
$M_{BA} = -1,837$ mT.	$M_{B'C'} = -0,19$ mT.
$M_{BC} = 0,052$ mT	$M_{C'B'} = -0,178$ mT.
$M_{CB} = -0,056$ mT.	$M_{D'D} = 0,0688$ mT
$M_{DB} = -0,759$ mT.	$M_{DD'} = 0,3025$ mT.
$M_{DB'} = 0,456$ mT.	
$M_{B'D} = 0,209$ mT.	

PROBLEMA ...-Calcular las leyes de momentos flectores en todas las barras de la estructura representada en la figura, si la barra $\overline{BB'}$ está sometida a un aumento de temperatura de 30 ºC.

DATOS: Todas las barras tienen la misma inercia, siendo el valor E*I= 10000. Tm^2, excepto las barras $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ que tiene rigidez infinita.

$\alpha = 2 * 10^{-5}$ $ºC^{-1}$.

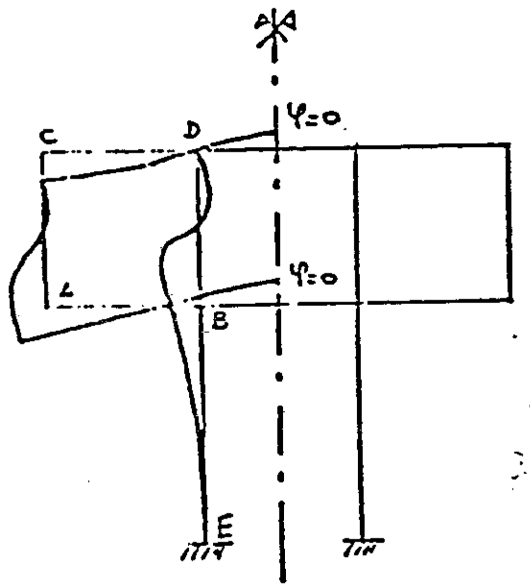


1- ESTUDIO PREVIO DE LA ESTRUCTURA

La estructura es simétrica de forma y de carga (ΔT en la barra ... siendo por tanto intraslacional en el sentido horizontal, con el matiz ya conocido de intraslacionalidad cuando interviene la temperatura, es decir los nudos ... y A se desplazan horizontalmente pero una magnitud conocida $\delta_A = \delta_B =$
$= \frac{l_{BB'}}{2}\alpha\Delta T = 2 \times 2 \times 10^{-5} \times 30 = 12 \times 10^{-4}$ m

Sin embargo el giro del nudo B hace que el nudo A se desplace verticalmente, lo que obliga al nudo C a desplazarse la misma distancia:

Como la barra AB tiene rigidez infinita, AB no se deforma sino que gira pero de forma que ($\varphi_A = \varphi_B = \theta$) Esto lleva consigo que $\delta_{VA} = \delta_{VB} = l_{AB}\,\theta$.



Por tanto tendremos como incognitas θ, φ_C y φ_D

y las ecuaciones siguientes para eliminarlas:

- Equilibrio nudos C y D $\Sigma M_C = M_D = 0$
- Equilibrio de cortantes

Tres ecuaciones con 3 incognitas.

para ecuac. elasticas

El equilibrio de los nudos A y B solo los podemos plantear para el ... M ... en la barra de rigidez infinita.

2.1.- EQUILIBRIO NUDO C

$$M_{CA} = \frac{4EI}{\ell_{CA}}\varphi_C + \frac{2EI}{\ell_{CA}}\varphi_A + \frac{6EI\delta}{\ell_{CA}^2} = EI\left[\varphi_C + 0.500\,\theta + 4.5\,10^{-4}\right]$$

$$M_{CD} = \frac{4EI}{\ell_{CD}}\varphi_C + \frac{2EI}{\ell_{CD}}\varphi_D - \frac{6EI(4\theta)}{\ell_{CA}^2} = EI\left[\varphi_C + 0.500\,\varphi_D - 1.5\,\theta\right]$$

$$\sum M_C = 0 = \underline{2\varphi_C - \theta + 0.5\varphi_D + 4.5\,10^{-4} = 0} \quad (1)$$

2.2.- EQUILIBRIO NUDO D

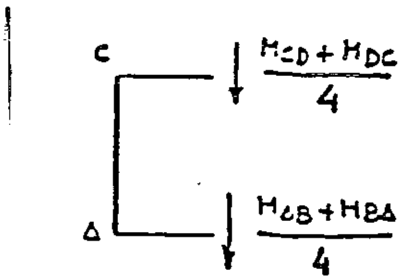
$$M_{DC} = \frac{4EI}{\ell_{CD}}\varphi_D + \frac{2EI}{\ell_{CD}}\varphi_C - \frac{6EI(4\theta)}{\ell_{CD}^2} = EI\left[\varphi_D + 0.50\,\varphi_C - 1.5\,\theta\right]$$

$$M_{DD'} = \frac{2EI}{\ell_{DD'}}\varphi_D = 0.5\,EI\,\varphi_D$$

$$M_{DB} = \frac{4EI}{\ell_{DB}}\varphi_D + \frac{2EI}{\ell_{DB}}\theta + \frac{6EI(2\alpha\Delta T)}{\ell_{DB}^2} = EI\left[\varphi_D + 0.5\,\theta + 4.5\,10^{-4}\right]$$

$$\sum M_D = 0 = \underline{2.50\,\varphi_D + 0.50\,\varphi_C - \theta + 4.5\,10^{-4} = 0} \quad (2)$$

2.3.- EQUILIBRIO DE CORTANTES



$$\left\{\begin{array}{l} M_{CD} = EI\left[\varphi_C + 0.5\,\varphi_D - 1.5\,\theta\right] \\ M_{DC} = EI\left[\varphi_D + 0.5\,\varphi_C - 1.5\,\theta\right] \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{M_{CD}+M_{DC}}{4} = EI\left[0.375\,\varphi_C + 0.375\,\varphi_D - 0.75\,\theta\right]}$$

$$M_{AB} = -M_{AC} = -EI\left[0.5\,\varphi_C + \theta + 4.5\,10^{-4}\right]$$

$$M_{BA} = -M_{BB'} - M_{BD} - M_{BE} = -EI\left[0.5\,\varphi_D + 2.167\,\theta + 2.5\,10^{-4}\right]$$

$\left(\frac{\ell_{CE}}{I_{CE}} \cdot \frac{2/3}{I_{CE}}\right)$ $M_{BB'} = \frac{2EI}{\ell_{BB'}}\varphi_B = 0.5\,EI\,\theta$

$$M_{BD} = EI\left[0.5\,\varphi_D + \theta + 4.5\,10^{-4}\right]$$

$$M_{BE} = \frac{4EI}{\ell_{BE}}\varphi_B - \frac{6EI(2\alpha\Delta T)}{\ell_{BE}^2} = EI\left[0.667\,\theta - 2\cdot 10^{-4}\right]$$

$$\boxed{\frac{M_{AB}+M_{BA}}{4} = -EI\left[0.125\,\varphi_C + 0.125\,\varphi_D + 0.792\,\theta + 1.\ \ 10^{-4}\right]}$$

$$\frac{M_{CD}+M_{DC}}{4}+\frac{M_{AB}+M_{BA}}{4}=0 \quad ; \; M_{CD}+M_{DC}+M_{AB}+M_{BA}=0$$

$$EI\left[\varphi_C+0.5\varphi_D-1.5\theta+\varphi_D+0.5\varphi_C-1.5\theta-0.5\varphi_C-\theta-4.5\,10^{-4}-0.5\theta-0.5\varphi_D\right.$$
$$\left.-4.5\,10^{-4}-0.667\theta+2.10^{-4}\right]=0$$

$$\underline{\varphi_C+\varphi_D-6.167\theta-7.\,10^{-4}=0} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\underline{\theta=-1.900\;10^{-4}} \qquad \underline{\varphi_C=-2.694\;10^{-4}} \qquad \underline{\varphi_D=-2.021\;10^{-4}}$$

$$\downarrow \delta_{YB}=l_{AB}\times\theta=4\times1.9\times10^{-4}=7.6\times10^{-4}$$

Por tanto los momentos:

$$M_{CA}=10.000\;.\;10^{-4}\left[-2{,}694-0.950+4.500\right]=0.856\ \text{mxT}$$

$$M_{CD}=10\,000\;\;10^{-4}\left[-2.694-1.011+2.850\right]=-0.555\ \text{mxT}$$

$$M_{DC}=\left[-2.021-1.347+2{,}850\right]=-0.518\ \text{mxT}$$

$$M_{DD'}=-1.011\ \text{mxT}$$

$$M_{DB}=\left[-2.021-0.950+4{,}500\right]=1.529\ \text{mxT}$$

$$M_{AB}=-\left[-1.347-1.900+4.500\right]=-1.253\ \text{mxT}$$

$$M_{AC}=1.253\ \text{mxT}$$

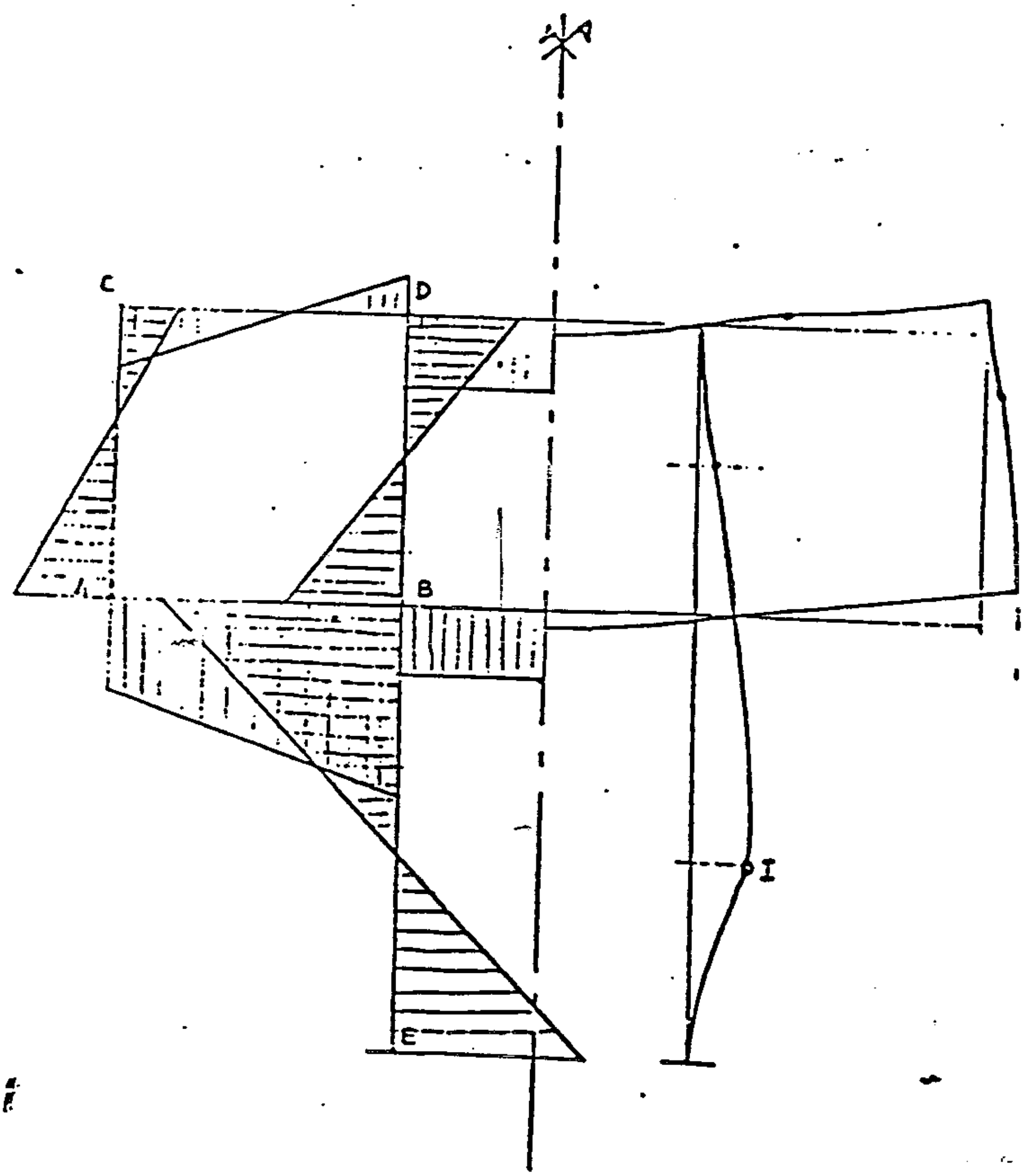
$$M_{BB'}=-0.950\ \text{mxT}$$

$$M_{BD}=\left[-1.011-1.900+4.500\right]=1.590\ \text{mxT}$$

$$M_{BE}=\left[-1.267-2{,}000\right]=-3.267$$

$$M_{BL}=-\left[-1.011-4.117+2.5\right]=2.628\ \text{mxT}$$

$$M_{EB}=-2.633\ \text{mxT}$$


A
C
D
B
E
I