



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

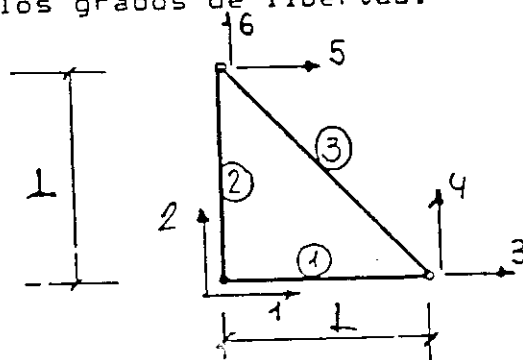
EJERCICIOS RESUELTOS

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

PROBLEMA 12.— Todas las barras de la celosia representada en la figura tienen el mismo módulo de elasticidad E y el mismo area A en su sección transversal. Teniendo en cuenta los grados de libertad indicados en la figura, se pide:

a.— Las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada una de las barras; así como, partiendo de ellas, la matriz de rigidez de la estructura.

b.— La matriz de rigidez de la estructura a partir de las fuerzas que generan las funciones de forma correspondientes a cada uno de los grados de libertad.

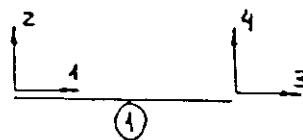


$$N = \frac{2 \times 1}{2}$$

Solución:

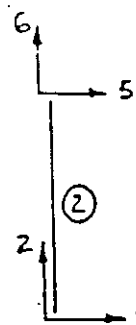
a) Barra ①:

$$\underset{\sim}{K}^{(1)} = \underset{\sim}{\hat{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$



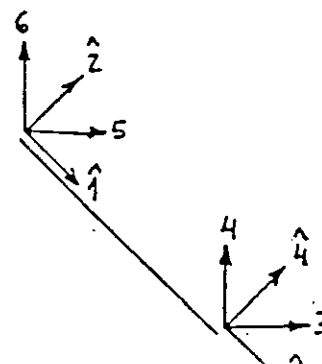
Barra ②:

$$\underset{\sim}{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



Barra ③:

$$\underset{\sim}{K}^{(3)} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\hat{K}}^{(3)} \underset{\sim}{L}^T$$



$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L = \left[\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right]$$

$$K_{\sim}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot L^T =$$

$$= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

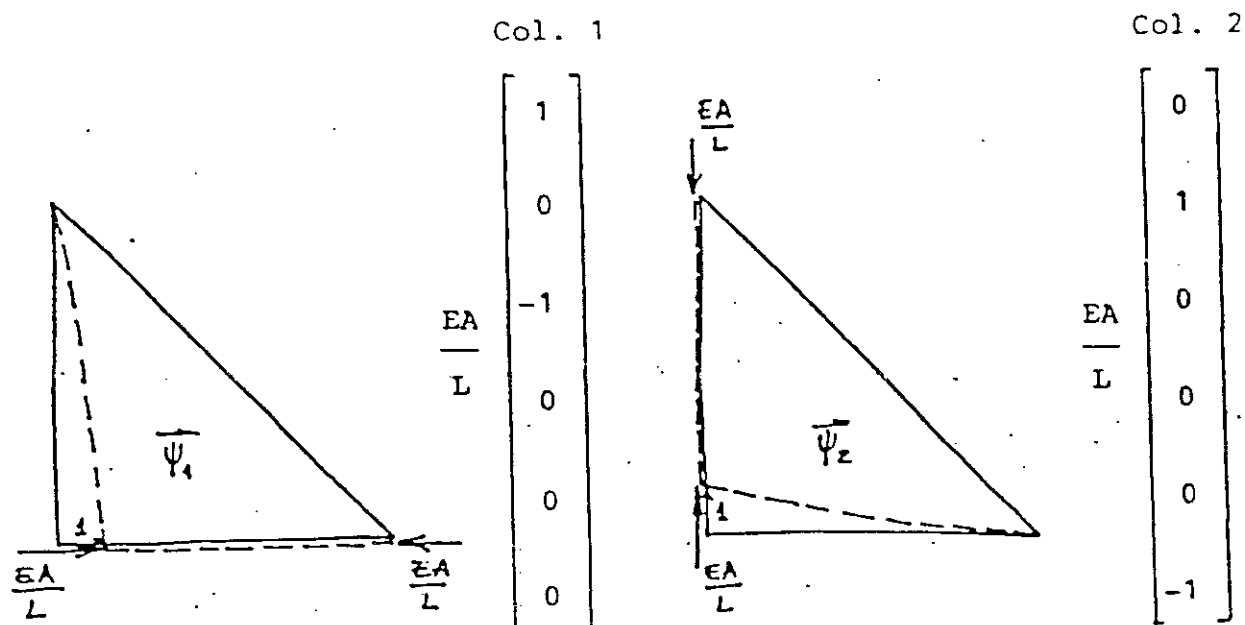
$$K_{\sim}^{(3)} = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

b) Sumando todos los coeficientes de las matrices elementales del apartado anterior, teniendo en cuenta su fila y columna globales se obtiene:

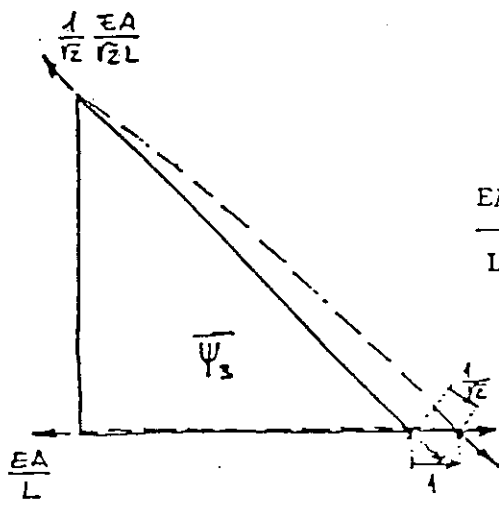
$$K = \frac{EA}{L}$$

	1	2	3	4	5	6	
1	1	0	-1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	-1	2
3	-1	0	$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	3
4	0	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	4
5	0	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	5
6	0	-1	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$	6

c) Cada columna se obtendrá como el trabajo virtual de las fuerzas que generan una deformada multiplicada por todas.

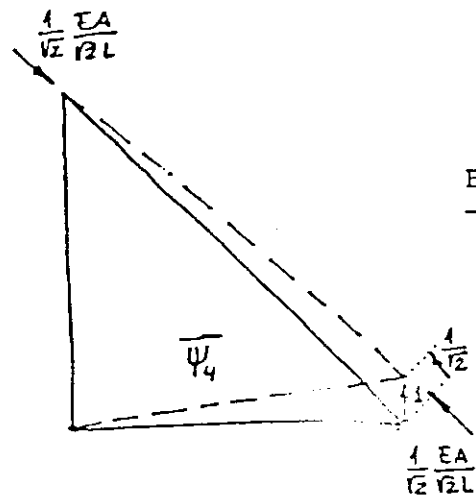


Col. 3



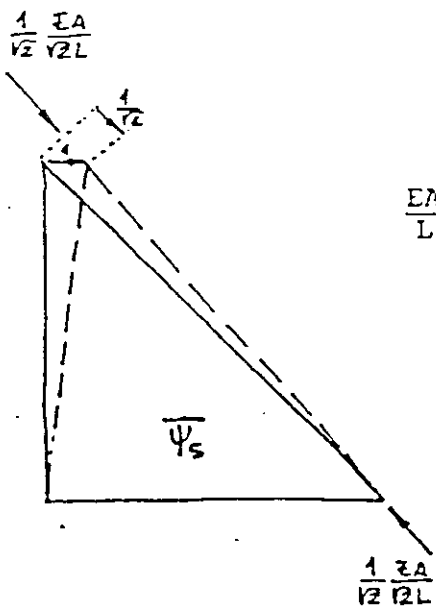
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Col. 4



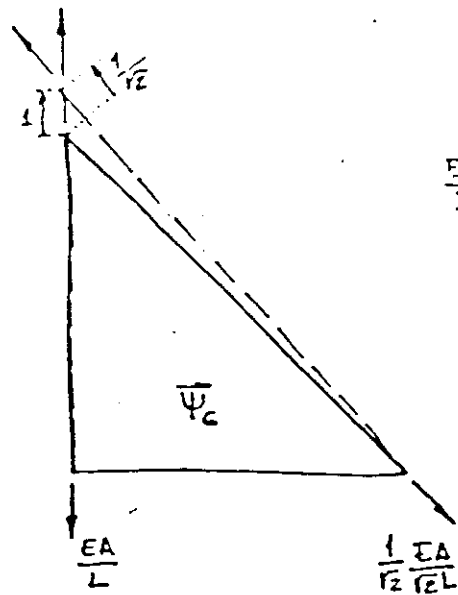
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Col. 5



$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Col. 6



$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 12.- Calcular los movimientos en el nudo A, así como los esfuerzos en las barras de la estructura representada en la figura, si además de la carga que se indica, la barra AC sufre un enfriamiento de 30 °C. Datos:

Barra AC de sección variable con un área en el extremo C de 4.- cm², de 12.- cm² en el extremo A y con variación lineal entre ambos extremos.

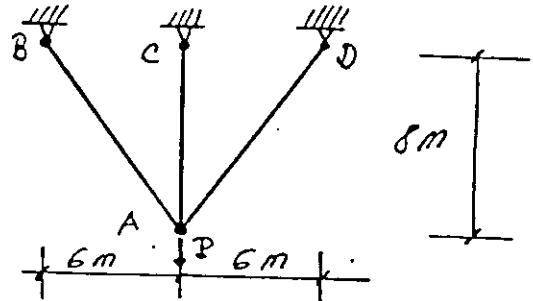
Barras AB y AD : A = 6.- cm²

P = 30.- T

E = 2*10⁶ kg/cm²

$\alpha = 2*10^{-5}$ °C⁻¹

Barra AC $R_p = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,128379167$
 $R_G = \sqrt{\frac{12}{\pi}} = 1,954410048$

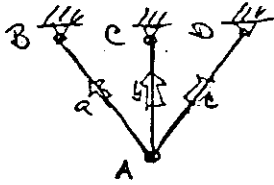




* MATRICES ELEMENTALES EN COORD. LOCALES:

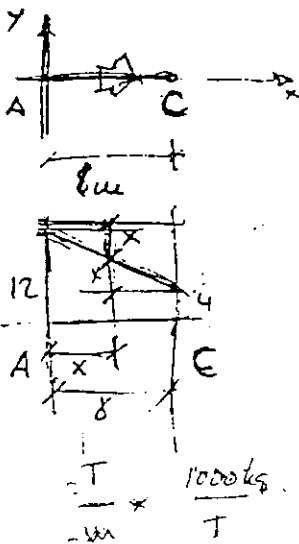
- BARRAS a, c :

$$\frac{EA}{L} = \frac{2 \times 10^6 \times 6}{1000} = 12 \times 10^3 \text{ kg/cm}$$



$$K_{11}^{12} = K_{11}^{12} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- BARRA b: Area: $A = (1200 - x) \times 10^{-2} \text{ cm}^2$



$$I = K \delta$$

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{\int_0^{800} \frac{dx}{EA}}{\int_0^{800} \frac{dx}{A}} = \frac{E}{\int_0^{800} \frac{dx}{(1200-x)10^{-2}}} = \frac{E}{\ln(1200) - \ln(400)} = \frac{2 \times 10^4}{\ln(1200) - \ln(400)} = \frac{2 \times 10^4}{\ln 3}$$

$$K = 1820 \times 10^3 \text{ kg/cm}$$

$$K_{11}^{12} = 10^3 \begin{bmatrix} 1820 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* MATRICES ELEMENTALES EN GLOBALES:

$$K_{11}^a = L_a K_{11}^{12} L_a^T = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4.32 & -5.76 \\ -5.76 & 7.68 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^b = L_b K_{11}^{12} L_b^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 1820 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18.2 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^c = L_c K_{11}^{12} L_c^T = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4.32 & 5.76 \\ 5.76 & 7.68 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE RIG. DE LA ESTRUCTURA:

$$K = K_{11}^a + K_{11}^b + K_{11}^c = 10^3 \begin{bmatrix} 8.64 & 0 \\ 0 & 33.56 \end{bmatrix}$$



TEMPERATURAS:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T = 2 \times 10^{-5} \times 800 \times 30 = 48 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

$$\Delta l = \frac{P l}{EA} = P \frac{1}{\frac{EA}{l}} = \frac{P}{18.2 \times 10^3} \Rightarrow P = 18.2 \times 10^3 \times 48 \times 10^{-2} = 8.736 \times 10^3$$

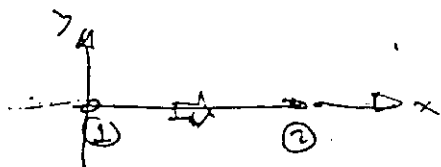
Como se puede ver respecto al caso con $P = 30 \times 10^3 \text{ kg.}$; los resultados del término se pueden obtener a partir de ellos.

Por tanto primero calculamos los esfuerzos para $P = 30$:

$$10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 8.64 & 0 \\ 0 & 53.56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_A = 0 \\ v_A = -\frac{30}{53.56} = -0.8959 \text{ cm} \end{matrix}$$

↑
Hacia abajo

ESFUERZOS EN BARRAS:



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_2 = 0 \quad (\text{el extremo 2 siempre es fijo en las barras a b y c})$$

$$\delta_1 = \perp_D \delta$$

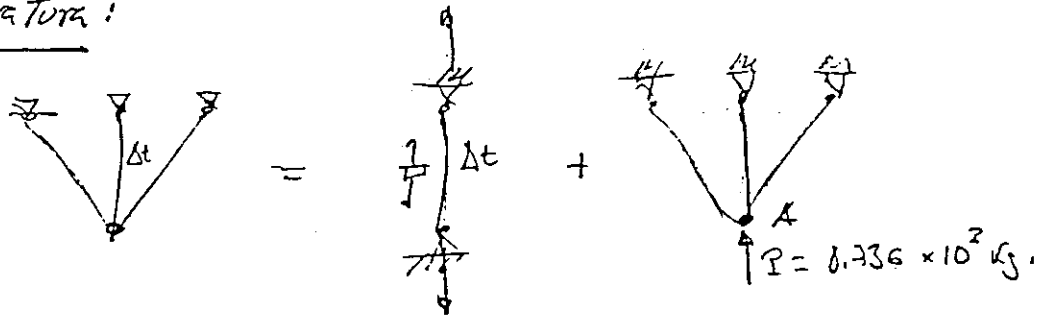
$$P_1^a = 10^3 \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.8939 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -8.5814 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Tensión}$$

Por simetría $P_1^a = P_1^a$.

$$P_1^b = 10^3 \begin{bmatrix} 18.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.8939 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -16.269 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Tensión}$$



Δ. Temperatura:



$$u_A = -0.8939 \times \frac{8.736 \times 10^3}{-30 \times 10^3} = 0.2603 \quad \leftarrow (\text{Hacia arriba})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = N_C = 8.5814 \times 10^3 \times \frac{8.736}{-30} = -2.5 \times 10^3 \text{ kg} \quad (\text{Compresión}) \\ N_B = -8.736 \times 10^3 + 16.269 \times \frac{8.736}{-30} = 4. \times 10^3 \text{ kg} \quad (\text{Tracción}) \end{array} \right.$$

-2498.90368
3998.4672

TOTAL:

$$u_A = 0$$

$$v_A = -0.8939 + 0.2603 = -0.6336 \text{ cm} \quad (\text{Hacia abajo})$$

$$N_A = N_C = (8.5814 - 2.5) \times 10^3 = 6.0814 \times 10^3 \text{ kg} \quad (\text{Tracción})$$

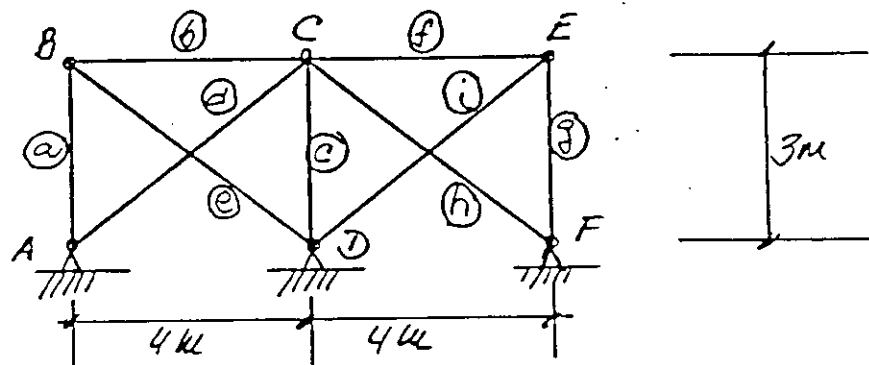
$$N_B = (16.269 + 4) \times 10^3 = 20.269 \times 10^3 \text{ kg} \quad (\text{Tracción})$$

PROBLEMA 12. - Calcular los movimientos de todos los nudos y los esfuerzos en todas las barras de la estructura simétrica representada en la figura, cuando las barras a, b, c, f, g sufren un aumento de temperatura de 30°C .

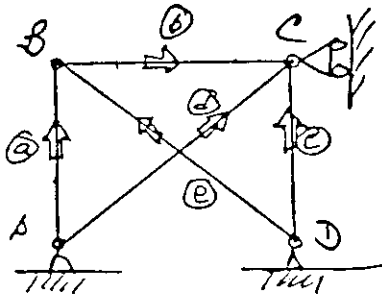
Datos: $A = 20 \text{ cm}^2$

$E = 2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$



Estructura simétrica (con barra C $(EA)' = \frac{(EA)}{2}$)



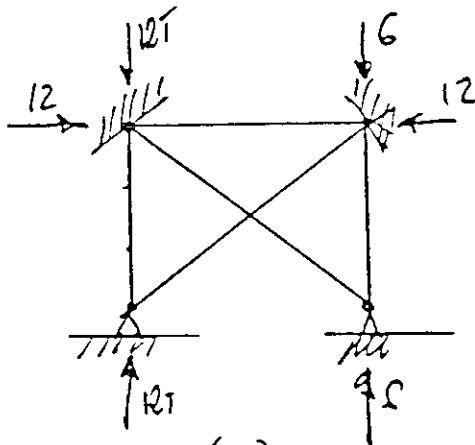
$$(EA)_7 = 4 \times 10^4 T$$

$$(EA)_{(C)} = 2 \times 10^4 T$$

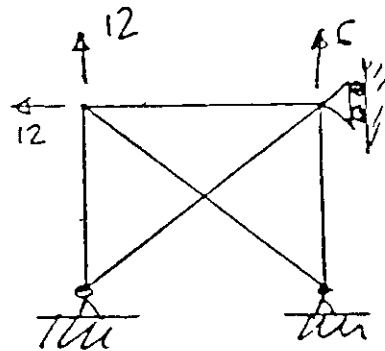
$$\Delta L = \alpha L \Delta t = \frac{NL}{EA} \Rightarrow N = EA \alpha \Delta T \Rightarrow N_a = 4 \times 10^4 \times 10^{-5} \times 30 = 12 T$$

$$N_b = 4 \times 10^4 \times 10^{-5} \times 20 = 8 T$$

$$N_c = 2 \times 10^4 \times 10^{-5} \times 50 = 10 T$$



(I)



(II)

ESTADO (II) :

$$\begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(a)} + K_{22}^{(c)} + K_{11}^{(b)} & & & \\ & K_{21}^{(c)} & & \\ & & K_{12}^{(b)} & \\ & & & K_{22}^{(c)} + K_{22}^{(a)} + K_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ Y_B \\ u_C \\ v_C \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 K_{11} = K_{22} &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\
 K_{12} = K_{21} &= -\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right.$$

BARRA a: $L=3$; $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{EA}{L} = 13.3 \times 10^3 \text{ T/m}$

$$K_{22}^{(a)} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 13.3 \end{pmatrix}$$

BARRA b: $L=4$; $\alpha=0 \Rightarrow \frac{EA}{L} = 10 \times 10^3 \text{ T/m}$

$$K_{22}^{(b)} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BARRA c: $L=3$; $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{EA}{L} = 6.6 \text{ T/m}$

$$K_{22}^{(c)} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.6 \end{pmatrix}$$

BARRA d: $L=5$ $\frac{EA}{L} = 8 \times 10^3 \text{ T/m}$ $\cos \alpha = 0.8$
 $\sin \alpha = 0.6$

$$K_{22}^{(d)} = 10^3 \begin{pmatrix} 5.12 & 3.84 \\ 3.84 & 2.88 \end{pmatrix}$$

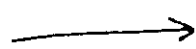
BARRA e: $L=5$ $\frac{EA}{L} = 8 \times 10^3 \text{ T/m}$ $\cos \alpha = -0.8$
 $\sin \alpha = 0.6$

$$K_{22}^{(e)} = 10^3 \begin{pmatrix} 5.12 & -3.84 \\ -3.84 & 2.88 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 15.12 & -3.84 & -10 & 0 \\ -3.84 & 16.213 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 15.12 & 3.84 \\ 0 & 0 & 3.84 & 9.546 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ X_c \\ 6 \end{Bmatrix}$$

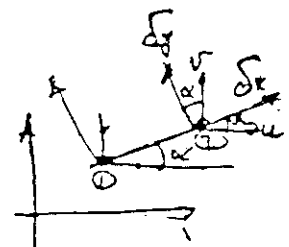
$$d = \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ 0 \\ v_C \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} -0.6445 \times 10^{-3} \\ 0.5874 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0.6285 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

ESFUERZOS EN BARRAS:

barra a: $\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$ en locales.



Para pasar despla. de globales a locales $\rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = T^T \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$

$$P_2 = K_{22} \delta_2$$

$$T^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} 10^{-3} \begin{Bmatrix} -0.6445 \\ 0.5874 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5874 \\ 0.6445 \end{Bmatrix}$$

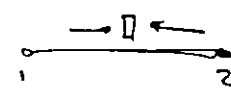
$$P_2 = 10^3 \begin{pmatrix} 13.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0.5874 \\ 0.6445 \end{Bmatrix} = 13.3 \times 0.5874 = 7.832 \text{ T}$$

EST. I+II) $N_{2 \text{ TOTAL}} = 7.832 \text{ T} - 12 \text{ T} = \boxed{-4.168 \text{ T}} \Rightarrow$



BORRAB:

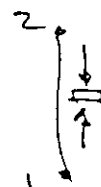
$$P_1 = K_{11} d_1 + K_{12} d_2 = 10 \times 10^3 (-0.6445 \times 10^{-3}) = -6.445$$

EST. I + II $N_{TOTAL(b)} = -6.445 + 12 = \underline{5.555 \text{ T}} \Rightarrow$ 

BORRAB: De forma análoga a la (a)

$$P_2 = 6.6 \times 10^3 \times 0.6285 \times 10^{-3} = 4.19$$

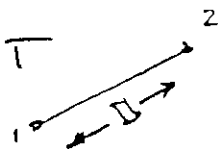
EST. I + II $N_c = 4.19 - 6 = -1.81 \text{ T}$



BORRAB:

$$P_2 = K_{21} \delta_1 + K_{22} \delta_2 = K_{22} \delta_2 ; \delta_2 = \begin{Bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_c \end{Bmatrix} = 0.6 \delta_c$$

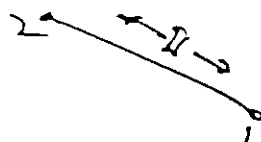
$$P_2 = 8 \times 10^3 \times 0.6 \times 0.6285 \times 10^{-3} = 3.0168 \text{ T}$$



BORRAB:

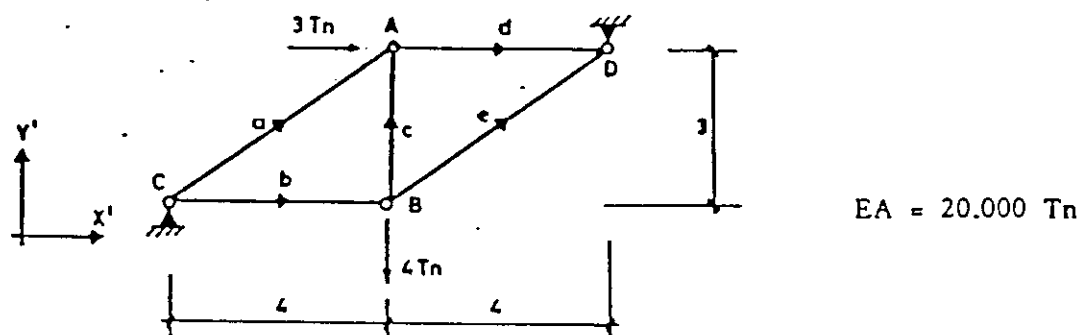
($P_2 = K_{21} \delta_1 + K_{22} \delta_2 = K_{22} \delta_2 ; \delta_2 = \begin{Bmatrix} -0.8 & 0.6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ \delta_b \end{Bmatrix} = 0.8684 \times 10^{-3}$)

$$P_2 = 8 \times 10^3 \times 0.8684 \times 10^{-3} = 6.9473 \text{ T}$$



PROBLEMA N°

Dada la estructura de la figura 4.6 articulada y con el estado de sustentación y cargas que se indica.



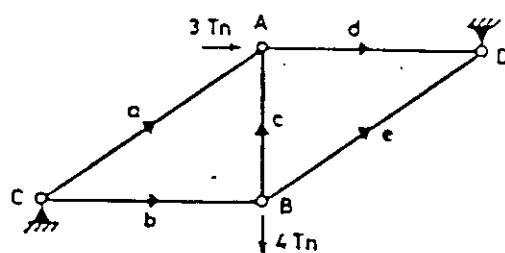
— Fig. 4.6 —

CALCULAR :

- Clasificar la estructura a partir de C (matriz de conexión)
- Esfuerzos en barras y movimientos de los nudos

RESOLUCION

El primer paso es enumerar los nudos y las barras (fig. 4.7). Nótese que los nudos C y D son nudos CER0, pues son fijos.



— Fig. 4.7 —

Clasificación de la estructura a partir de C

$$T_a = T_e = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_b = T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de conexión C, será :

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Luego al ser C rectangular ($n > N$) implicará que es HIPERESTÁTICA DE GRADO UNO.

Calculo de movimientos en los nudos A y B

Al ser la estructura hiperestática, el cálculo lo haremos a través de la matriz de rigidez K'

Sabemos que: $P' = K' d'$

Como conocemos la matriz C, calcularemos la matriz K' de la siguiente forma :

$$K' = C K_{\text{barras}} C^T$$

$$K' = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 & & & & \\ & 5000 & & & \\ & & 6667 & & \\ \Omega & & & 5000 & \\ & & & & 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & -0,6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7560 & 1920 & 0 & 0 \\ 1920 & 8107 & 0 & -6667 \\ 0 & 0 & 7560 & 1920 \\ 0 & -6667 & 1920 & 8107 \end{bmatrix}$$

(que por supuesto es simétrica)

Formemos el sistema $P' = K' d'$ que en forma matricial será :

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7560 & 1920 & 0 & 0 \\ 1920 & 8107 & 0 & -6667 \\ 0 & 0 & 7560 & 1920 \\ 0 & -6667 & 1920 & 8107 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, nos queda :

$$\begin{cases} u_A = 1,003 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_A = -2,388 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ u_B = 0,664 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_B = -2,615 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (\text{movimientos de los nudos A y B})$$

Esfuerzos en las barras (Por supuesto solo hay axiles)

$$P_2 = K_{21} d_1 + K_{22} d_2 \quad (\text{ecuación de estado})$$

$$P_{2a} = K_{21a} d_{1a} + K_{22a} d_{2a} = K_{22a} T_a^T d'_{2a} = K_{22a} T_a^T d'_A =$$

(Nótese que $d_{1a} = 0$ pues el extremo 1 de la barra a es fijo)

$$= \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,003 \\ -2,388 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -2,52 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{componente según x}) \\ (\text{componente según y}) \end{matrix}$$

Luego $N_a = -2,52 \text{ Tn}$ (según eje x)

$$\begin{aligned} P_{2c} &= K_{21c} d_{1c} + K_{22c} d_{2c} = k_{21c} T_c^T d'_{1c} + k_{22c} T_c^T d'_{2c} = \\ &= K_{21c} T_c^T d'_B + K_{22c} T_c^T d'_A = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -6667 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,664 \\ -2,615 \end{Bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 6667 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,003 \\ -2,388 \end{Bmatrix} 10^{-3} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 1,51 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{(componente según x)} \\ \text{(componente según y)} \end{matrix}$$

Luego $N_c = 1,51 T_n$ (según eje x)

haciendo lo mismo con el resto de las barras , obtenemos :

$$N_b = 3,32 T_n \quad N_d = -5,01 T_n \quad N_e = 4,15 T_n$$

PROBLEMA 12. - Calcular los movimientos del nudo A de la estructura representada en la figura, así como el axil en la barra c, si las barras a y b sufren un aumento de temperatura de 30 °C.

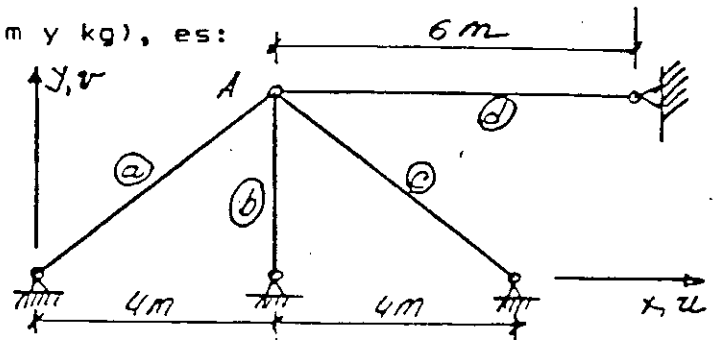
Datos: $A = 30 \text{ cm}^2$

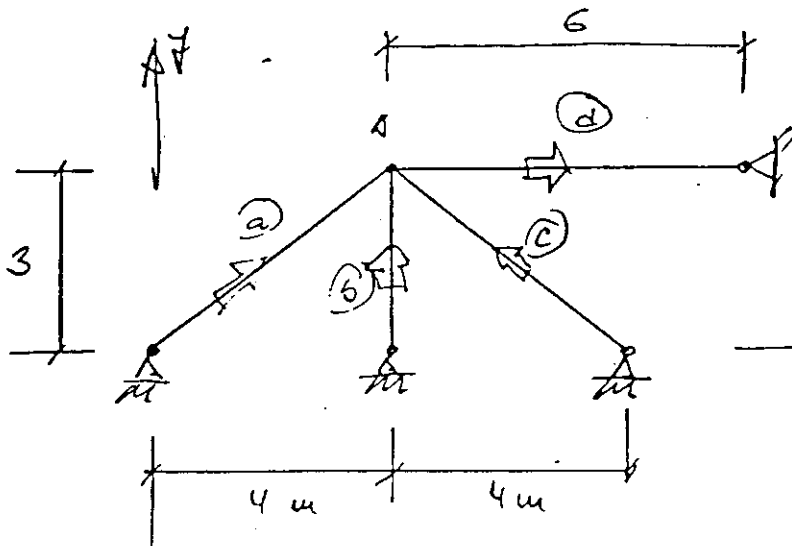
$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Nota: La ecuación matricial para el cálculo de los movimientos en el nudo A (unidades cm y kg), es:

$$\begin{Bmatrix} P_x^A \\ P_y^A \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 258.6 & 0 \\ 0 & 286.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \end{Bmatrix}$$





$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$I_c = I_a = 5$$

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$-C_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(a)} = K_{22}^{(b)} = \begin{bmatrix} 120 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(b)} = \begin{bmatrix} 200 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{(a)} = K_{11}^{(b)} = \begin{bmatrix} 100 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(a)} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 120 \frac{16}{25} & 120 \frac{12}{25} \\ 120 \frac{12}{25} & 120 \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(c)} = \begin{bmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 120 \frac{16}{25} & -120 \frac{12}{25} \\ -120 \frac{12}{25} & 120 \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$K_{\text{estr.}} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(a)} + K_{22}^{(b)} + K_{22}^{(c)} + K_{11}^{(a)} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 253.6 & 0 \\ 0 & 286.4 \end{bmatrix}$$



Vector de cargas equivalentes:

$$N = E \Omega \alpha \Delta T = 60 \times 10^6 \times 10^{-5} \times 30 = 18000 \text{ kg}$$

$$\underline{P}_2^a = \underline{P}_2^b = 10^3 \begin{Bmatrix} 18 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_2^a = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 18 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 18 \frac{4}{5} \\ 18 \frac{3}{5} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 14.4 \\ 10.8 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_2^b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 18 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_{est} = 10^3 \begin{Bmatrix} 14.4 \\ 10.8 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 14.4 \\ 28.8 \end{Bmatrix}$$

$$10^3 \begin{Bmatrix} 14.4 \\ 28.8 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 253.6 & 0 \\ 0 & 286.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$u = \frac{14.4}{253.6} = 0.05678 \text{ cm}$$

$$v = \frac{28.8}{286.4} = 0.10055 \text{ cm}$$

$$u = \frac{14.4}{157.6} = 0.0914 \text{ cm}$$

$$v = \frac{28.8}{86.4} = 0.333 \text{ cm}$$

Esfuerzo axial en la barra c:

$$\underline{P}_c' = \underline{K}^c \underline{\delta} = 10^3 \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 91.4 \\ 333.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -120 \frac{4}{5} 91.4 + 120 \frac{3}{5} 333 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1788.72 \\ 15225.36 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

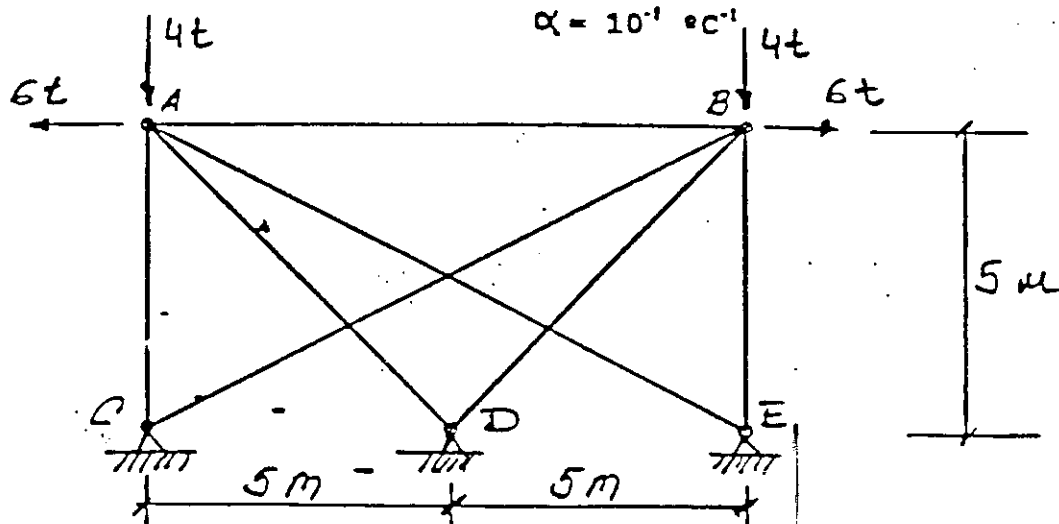
PROBLEMA 2.—La estructura simétrica de la figura ,además de las cargas que se indican está sometida a un incremento de temperatura de 20°C .

Calcular por métodos matriciales los movimientos de los nudos y los esfuerzos en las barras.

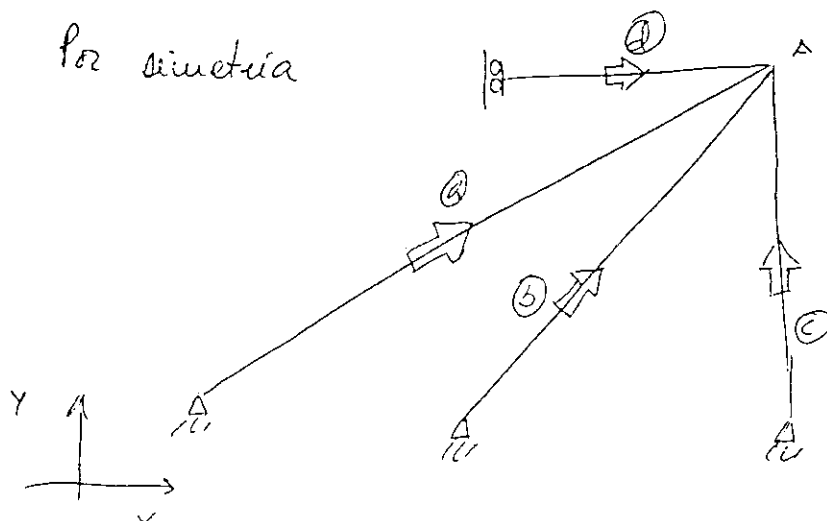
DATOS: Para todas las barras. $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$A = 10. \text{ cm}^2$

$\alpha = 10^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$



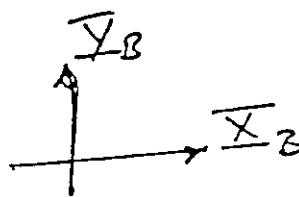
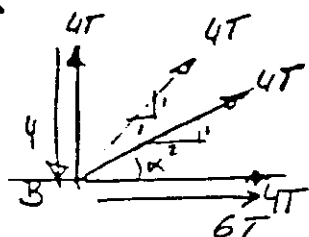
Por simetría





$$P = \alpha E \Delta T = \frac{10000}{0.01} \cdot 10^\circ\text{C} = 4000 \text{ kg} = 4T$$

En el nudo B:



$$X_B = 6 + 4 + 4 \cos 45^\circ + 4 \cos 26.565^\circ = 16.4061 \text{ T}$$

$$Y_B = 4 \sin 45^\circ + 4 \sin 26.565^\circ = 4.6173 \text{ T}$$

Matriz de rigideces de la estructura:

$$K = K_{22}^{(a)} + K_{22}^{(b)} + K_{22}^{(c)} + K_{22}^{(d)}$$

$$L_a = 5\sqrt{5}$$

$$L_b = 5\sqrt{2}$$

$$L_c = 5$$

$$L_d = 5$$

$$EI = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 10 \text{ cm}^4 = \frac{2 \times 10^7}{10^8} \text{ T} = 2 \times 10^4 \text{ T}$$

$$K_{22}^{(a)} = \frac{EI}{L_a} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = 1781.85 \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 26.5651^\circ$$

$$K_{22}^{(b)} = \frac{EI}{L_b} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = 2628.43 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$K_{22}^{(c)} = 4000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$K_{22}^{(d)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$K = \begin{bmatrix} 6845.295 & 2129.755 \\ 2129.755 & 5771.985 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 16.4651 \\ 4.6173 \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} \delta_{x_A} \\ \delta_{y_A} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_{x_A} \\ \delta_{y_A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0024 \\ -0.000095 \end{Bmatrix}$$

Esfuerzos en las barras:

$$P_{2A}^D = 1788.854 \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0024 \\ -0.000095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.402 \\ 1.7 \end{Bmatrix}$$

$$P_2^D = 2828.43 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0024 \\ -0.000095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.294 \\ 3.294 \end{Bmatrix}$$

$$P_2^D = 4000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0024 \\ -0.000095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.384 \end{Bmatrix}$$

$$P_2^D = 4000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0024 \\ -0.000095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.7 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$N_A = \sqrt{3.402^2 + 1.7^2} - 4 = 3.803 - 4 = -0.197 \text{ T (Compresión)}$$

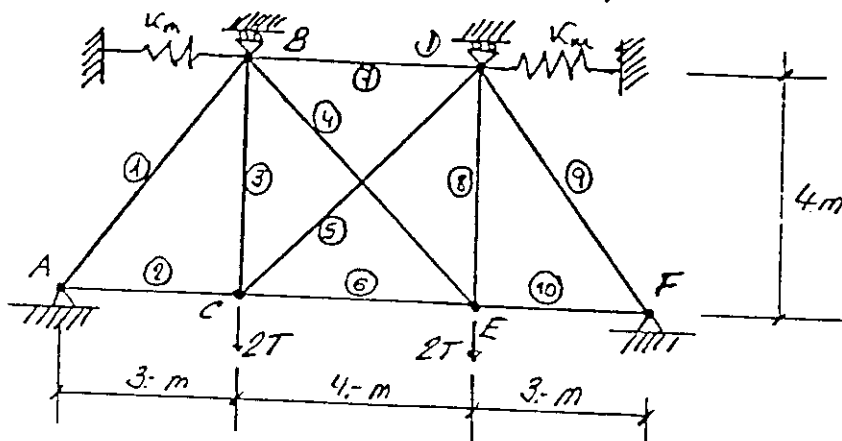
$$N_B = 3.294\sqrt{2} - 4 = 0.658 \text{ T (Tracción)}$$

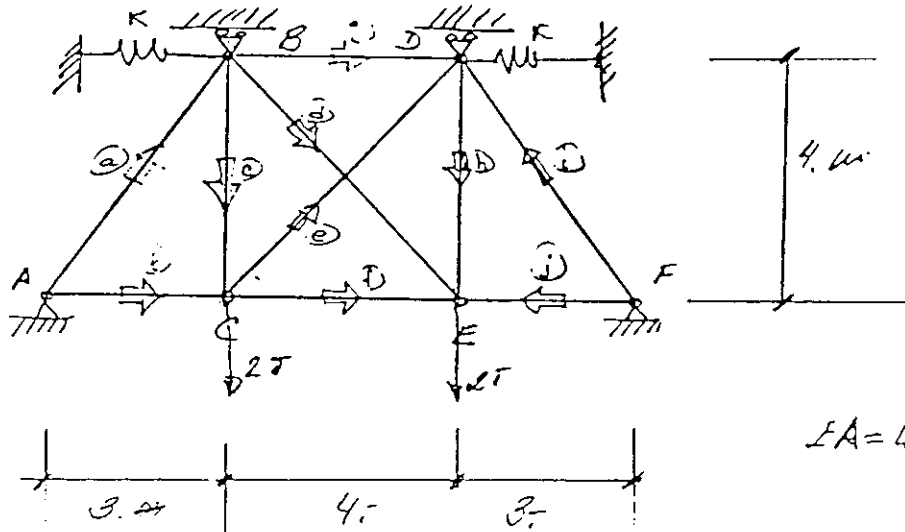
$$N_C = -0.384 - 4 = -4.384 \text{ T (Compresión)}$$

$$N_D = 9.7 - 4 = 5.7 \text{ T (Tracción)}$$

PROBLEMA 12.- Calcular los movimientos en todos los nudos de la estructura representada en la figura, así como las reacciones en los apoyos B y D de la misma.

Datos: Para todas las barras: $A = 20 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$
 Rigidez de los muelles $K_u = 100 \text{ T/m}$





$$EA = 40000 \text{ T}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \\ X_D \\ Y_D \\ X_E \\ Y_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{22}^b + K_{11}^c + K_{11}^d + K_{11}^e & K_{12}^c & K_{12}^e & K_{12}^d \\ K_{21}^c & K_{22}^b + K_{22}^c + K_{11}^e + K_{11}^f & K_{12}^e & K_{12}^f \\ K_{21}^e & K_{21}^e & K_{11}^e + K_{22}^i + K_{22}^j + K_{22}^k + K_{11}^h & K_{12}^h \\ K_{21}^d & K_{21}^f & K_{21}^h & K_{22}^i + K_{22}^j + K_{22}^k + K_{22}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B = 0 \\ u_C \\ v_C \\ u_D = -u_B \\ v_D = 0 \\ u_E = -u_C \\ v_E = v_C \end{Bmatrix}$$

$$K_{11}^{ele} = K_{22}^{ele} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^{ele} = K_{22}^{ele} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = -\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$



Barra a: $K_{32}^a = 8000 \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{5}\right)^2 & \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{bmatrix} = 8000 \cdot \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$

Barra b: $K_{22}^b = \frac{40000}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Barra c: $K_{11}^c = K_{22}^c = 10000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $K_{12}^c = K_{21}^c = -10000 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Barra d: $K_{11}^d = K_{22}^d = \frac{10000}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $K_{12}^d = K_{21}^d = \frac{10000}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Barra e: $K_{11}^e = K_{22}^e = \frac{10000}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $K_{12}^e = K_{21}^e = -\frac{10000}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Barra f: $K_{11}^f = K_{22}^f = 10000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $K_{12}^f = K_{21}^f = 10000 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Barra g: "

Barra h: $K_{11}^h = K_{22}^h = 10000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $K_{12}^h = K_{21}^h = -10000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Barra i: $K_{22}^i = 8000 \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$

Barra j: $K_{22}^j = \frac{40000}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$u_B = 1.90709 \times 10^{-5} m = 0.019 mm = -u_D$$

$$u_C = 1.31475 \times 10^{-5} m = 0.013 mm = -u_E$$

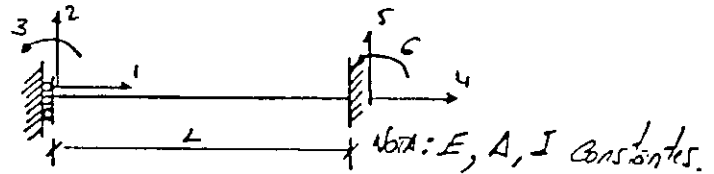
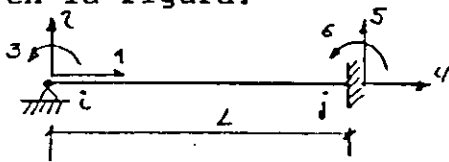
$$v_C = -1.561748 \times 10^{-4} m = -0.156 mm = v_E$$

Reemplazando valores en la ecuación matricial:

$$\gamma_B = 204.47 \cdot u_B - 3535.53 \cdot u_C - 13535.53 \cdot u_E = \underline{\underline{2.0732 T}} = \gamma_D$$

$$\underline{\underline{\gamma_E}} = -\underline{\underline{\gamma_D}} = -100.7 \cdot u_B = \underline{\underline{-0.0019 T}}$$

PROBLEMA 20.- Obtener a partir de la matriz de rigidez de la barra de pórtico plano, las matrices de rigidez de los elementos que se indican en la figura.



E, A, I des

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}$$

$EAI, \text{ Constantes.}$

Sim

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\frac{6EI}{L^2} V_1 = -\frac{3EI}{L} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} V_2 - \frac{3EI}{L} \theta_2$$

A

Despejando a $[K_{ij}]_{\text{sup. sup.}}$ V_1 de la segunda y haciendo $V_1 = 0$

$$X_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2$$

$$M_1 = -\frac{3EI}{L} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} V_2 - \frac{3EI}{L} \theta_2 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} V_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 = \frac{EI}{L} \theta_1 - \frac{EI}{L} \theta_2$$

$$X_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2$$

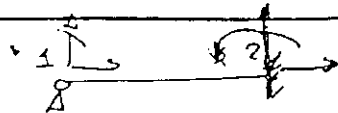
$$Y_2 = \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{12EI}{L^3} V_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{12EI}{L^3} V_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 = 0$$

$$M_2 = -\frac{3EI}{L} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} V_2 - \frac{3EI}{L} \theta_2 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} V_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 = -\frac{EI}{L} \theta_1 + \frac{EI}{L} \theta_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} & 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$



ART. - EMPOTRADA:



$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2$$

$$Y_1 = \frac{12EI}{L^3} v_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2$$

$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2$$

$$X_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2$$

$$Y_2 = -\frac{12EI}{L^3} v_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2$$

$$M_2 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{2EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{4EI}{L} \theta_2$$

Despejando θ_1 de la tercera: $\frac{2EI}{L} \theta_1 = -\frac{3EI}{L^2} v_1 + \frac{3EI}{L^2} v_2 - \frac{EI}{L} \theta_2$
haciendo $M_1 = 0$

$$X_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2$$

$$Y_1 = \frac{12EI}{L^3} v_1 - \frac{9EI}{L^3} v_1 + \frac{9EI}{L^3} v_2 - \frac{3EI}{L^2} \theta_2 - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 = \frac{3EI}{L^3} v_1 - \frac{3EI}{L^3} v_2 + \frac{3EI}{L^2} \theta_2$$

$$X_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2$$

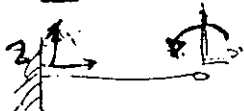
$$Y_2 = -\frac{12EI}{L^3} v_1 + \frac{9EI}{L^3} v_1 - \frac{9EI}{L^3} v_2 + \frac{3EI}{L^2} \theta_2 + \frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 = -\frac{3EI}{L^3} v_1 + \frac{3EI}{L^3} v_2 - \frac{3EI}{L^2} \theta_2$$

$$M_2 = 6EI v_1 - 3EI v_2 - 3EI \theta_2$$



$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

EMP. - APOY.: Do análisis manual despegando θ_2 de la última y sacando K_2 .



$$\frac{2EI}{L} \theta_2 = -\frac{3EI}{L^2} V_1 - \frac{EI}{L} \theta_1 + \frac{3EI}{L^2} V_2$$

$$x_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2$$

$$y_1 = \frac{12EI}{L^3} V_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{12EI}{L^3} V_2 - \frac{9EI}{L^2} \theta_1 - \frac{3EI}{L^2} \theta_1 + \frac{9EI}{L^3} V_2 = \frac{3EI}{L^3} V_1 + \frac{3EI}{L^2} \theta_1 - \frac{3EI}{L^3} V_2$$

$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} V_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} V_2 - \frac{3EI}{L^2} V_1 - \frac{EI}{L} \theta_1 + \frac{3EI}{L^2} V_2 = \frac{3EI}{L^2} V_1 + \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L^2} V_2$$

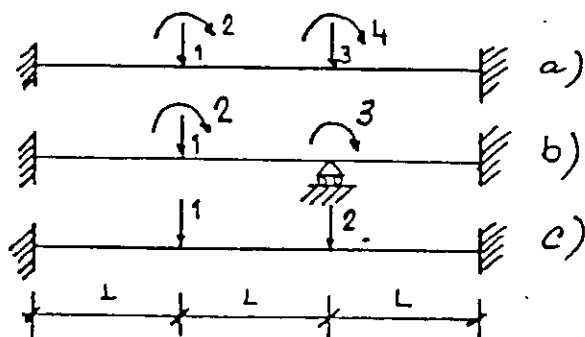
$$x_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2$$

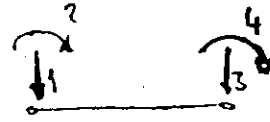
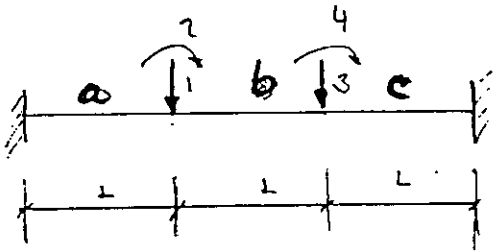
$$y_2 = -\frac{12EI}{L^3} V_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{12EI}{L^3} V_2 + \frac{9EI}{L^2} V_1 + \frac{3EI}{L^2} \theta_1 - \frac{9EI}{L^3} V_2 = -\frac{3EI}{L^3} V_1 - \frac{3EI}{L^2} \theta_1 + \frac{3EI}{L^3} V_2$$

$$K_{EMP. - AP.} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2º.- Calcular la matriz de rigidez de la viga de la figura a, considerando las cuatro coordenadas que se indican. Condensar la matriz obtenida para calcular las matrices de rigidez correspondientes a la viga de la figura b, con las tres coordenadas que se indican, y a la de la figura c, únicamente con dos coordenadas.

La rigidez a flexión EI es constante a lo largo de la viga.





$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^b & K_{12}^b \\ K_{21}^b & K_{22}^b + K_{22}^c \end{bmatrix} =$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^3} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

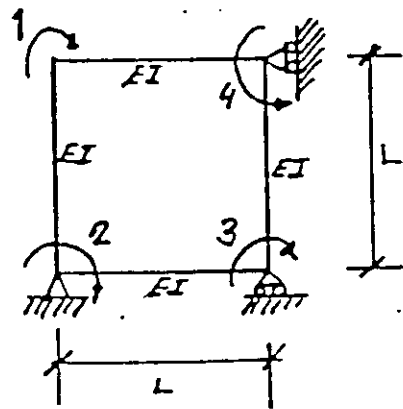
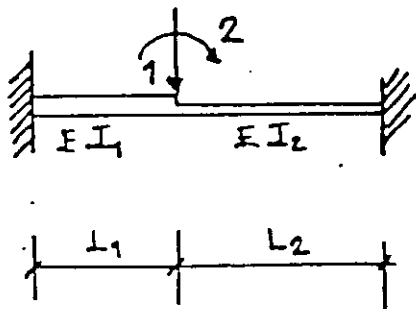
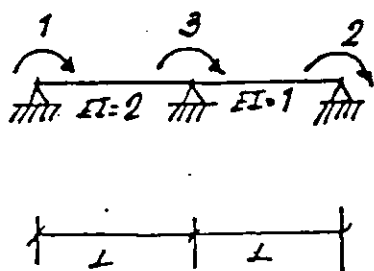
$$K = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FL} \\ K_{LF} & K_{LL} \end{bmatrix}$$

$$K = K_{FF} - K_{FL} K_{LL}^{-1} K_{LF} = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{19.2EI}{L^3} & -\frac{13.2EI}{L^3} \\ -\frac{13.2EI}{L^3} & \frac{19.2EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 22.- Obtener las matrices de rigidez de las estructuras de la figura a partir de las fuerzas que generan las funciones de forma correspondientes a cada uno de los grados de libertad indicados.



①

COLUMNA 1

COLUMNA 2

COLUMNA 3

$$K = \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & 0 & \frac{4}{L} \\ 0 & \frac{4}{L} & \frac{2}{L} \\ \frac{4}{L} & \frac{2}{L} & \frac{12}{L} \end{bmatrix}$$

②

COLUMNA 1:

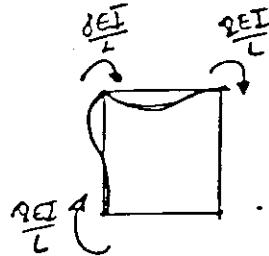
COLUMNA 2:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} + \frac{6EI_2}{L_2^2} \\ -\frac{6EI_1}{L_1^2} + \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

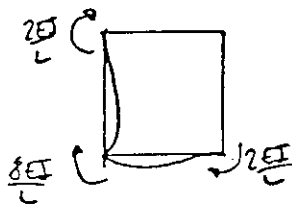


8

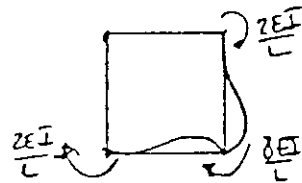
COLUMNA 1 :



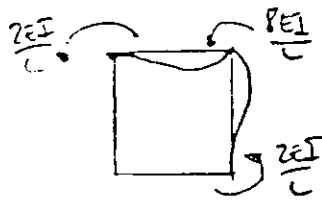
COLUMNA 2 :



COLUMNA 3 :



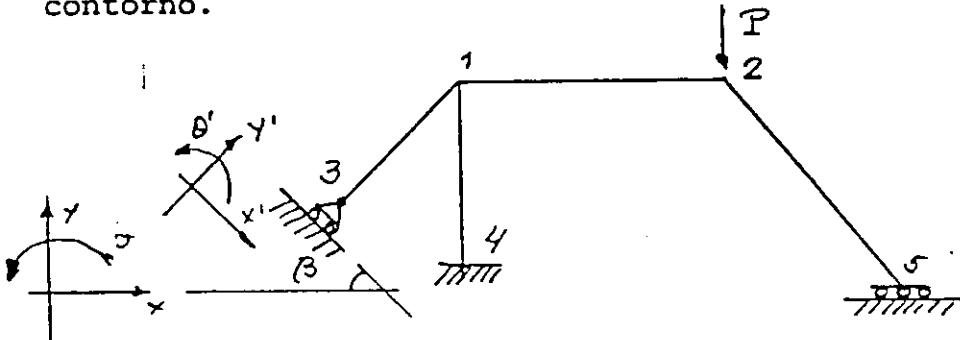
COLUMNA 4 :



$$\underline{K} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$



PROBLEMA 2º. -Escribir la ecuación matricial $P = K \cdot \delta$ para la estructura de la figura, tras la aplicación de las condiciones de contorno.



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix}$$

Transformación coordenadas nodo 3:

$$\delta_3 = L^T \delta'_3$$

$$P_3 = L^T P'_3$$

Dado: $L = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Just:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P'_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} L^T & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} \\ L^T K_{31} & 0 & L^T K_{33} L^T & 0 & 0 \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta'_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix}$$

- Premult. δ_3 por $L^T \equiv$ Postmult. 3ª columna de K por L^T
- Se premultiplica la 3ª fila de K por L y teniendo en cuenta que $L L^T = I$

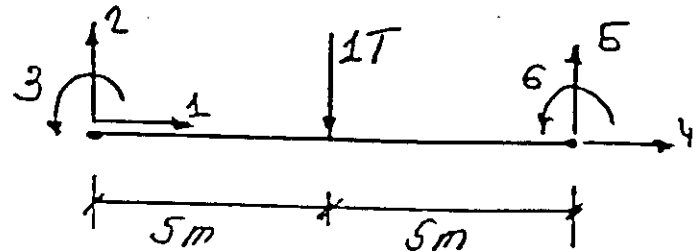
Dado: $P_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $P_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$, $P'_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $P_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $P_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\delta_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$, $\delta_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$, $\delta_3 = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$, $\delta_4 = \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$, $\delta_5 = \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$

$\delta_5 = \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$

PROBLEMA 22.- Calcular los esfuerzos en la barra de la figura sometida a las cargas indicadas, si el vector de desplazamientos en coordenadas locales es el siguiente:

$$\delta = \begin{Bmatrix} 1.18 \\ -2. \\ 2 * 10^{-4} \\ 1.20 \\ -3. \\ 3 * 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad (\text{cm, rad})$$



Datos: $E = 2 * 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$I = 10^8 \text{ cm}^4$

$A = 80 \text{ cm}^2$

Solución:

El vector de esfuerzos en los extremos de la barra en coordenadas locales es determinado por:

$$\hat{f}_{\sim N} = \hat{k}_{\sim}^e \hat{a}_{\sim} + \hat{f}_{\sim emp} \quad (1)$$

donde $\hat{k}_{\sim}^e$ es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales y $\hat{f}_{\sim emp}$ son los esfuerzos de empotramiento perfecto correspondientes a la carga aplicada.

La demostración de la anterior fórmula es fácil si se piensa la barra como una estructura completa y se considera que los esfuerzos en los extremos son entonces unas cargas externas en nudos que, junto con las cargas equivalentes (esfuerzos de empotramiento cambiados de signo), configuran el vector de cargas en la ecuación de equilibrio

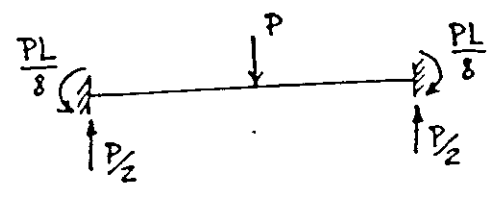
$$\hat{k}_{\sim}^e \hat{a}_{\sim} = \hat{f}_{\sim N} - \hat{f}_{\sim emp}$$

de la que se deduce (1) inmediatamente.

Matriz de rigidez elemental:

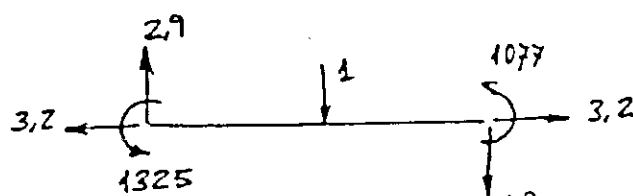
$$\begin{aligned}
 \hat{K}^e = & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \\
 = & \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 & -160 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4 & 1200 & 0 & -2,4 & 1200 \\ 0 & 1200 & 8 \cdot 10^5 & 0 & -1200 & 4 \cdot 10^5 \\ -160 & 0 & 0 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & -2,4 & -1200 & 0 & 2,4 & -1200 \\ 0 & 1200 & 4 \cdot 10^5 & 0 & -1200 & 8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vector de fuerzas de empotramiento:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{emp}} = \begin{bmatrix} 0 \\ P/2 \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ P/2 \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 125 \\ 0 \\ 0,5 \\ -125 \end{bmatrix} \quad (t, \text{ cm } t)$$


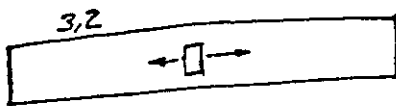
Vector de esfuerzos en los extremos:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{N}} = \hat{\mathbf{K}}^e \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{emp}} = \begin{bmatrix} -3,2 \\ 2,4012 \\ 1199,6 \\ 3,2 \\ -2,4012 \\ 1201,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 125 \\ 0 \\ 0,5 \\ -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,2 \\ 2,9012 \\ 1324,6 \\ 3,2 \\ -1,9012 \\ 1076,6 \end{bmatrix} \quad (t, \text{ cm } t)$$



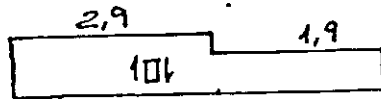
Obteniéndose los siguientes diagramas de esfuerzos:

AXILES



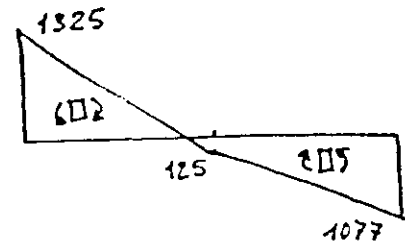
(t)

CORTANTES



(t)

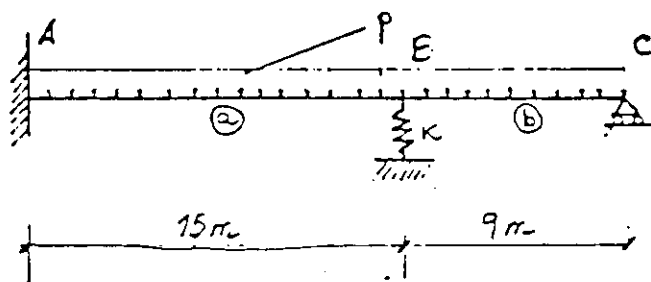
FLECTORES

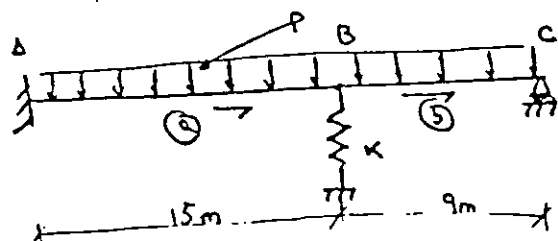


(cm t)

PROBLEMA 1º..-Calcular los movimientos en el nudo B de la viga representada en la figura.

Datos: Para todas las barras $E \cdot I = 400 \text{ Tm}^4$ $K = 10 \text{ T/m}$ $p = 150 \text{ Kg/m}$



Problema 1

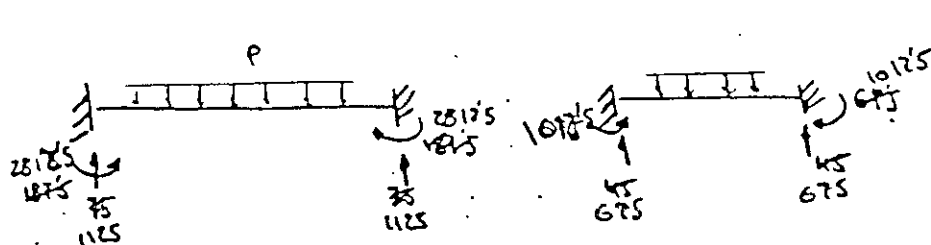
- los movimientos de B serán uno vertical y no habrá vertical ni giro.

$$\begin{bmatrix} P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(5)} + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'42 & -6'6 \\ -6'6 & 106'6 \cdot 10^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{(5)} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2'16 \cdot 10^2 & 14'87 \\ 14'87 & 133'33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11'58 & -8'13 \\ -8'13 & 153'63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \end{bmatrix}$$



$$P_0 = \begin{bmatrix} -1800 \\ 1800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

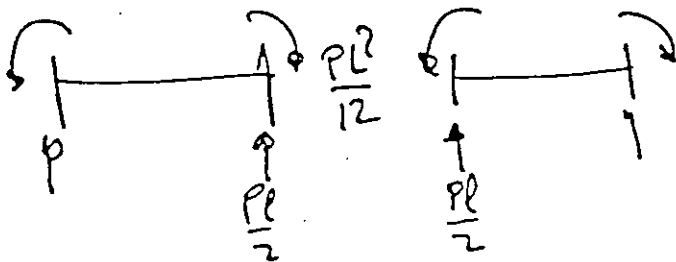
$$\begin{bmatrix} -1800 \\ 1800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13'02 & -4'27 \\ -4'27 & 240'00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

~~$V_0 = 0,535 \text{ m}$~~



$$K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.42 & -10.67 \\ -10.67 & 106.67 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.65 & 14.815 \\ 14.815 & 133.33 \end{bmatrix}$$



$$\frac{150 \times 15}{12 \times 1000} = 2.8125 \text{ mT}$$

$$\frac{150 \times 9}{12 \times 1000} = 1.0125 \text{ mT}$$

$$I_2 = 1.8 \text{ mT}$$

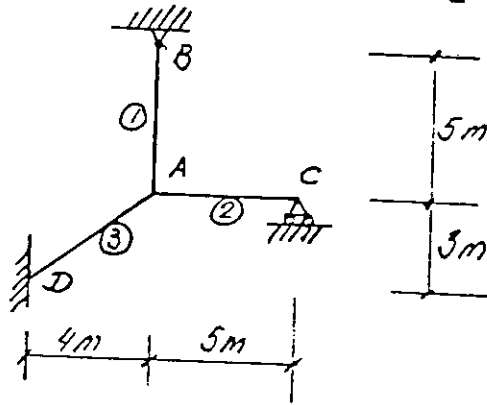
$$I_2 = \frac{150 \times (15+9)}{12 \times 1000} = -1.8$$

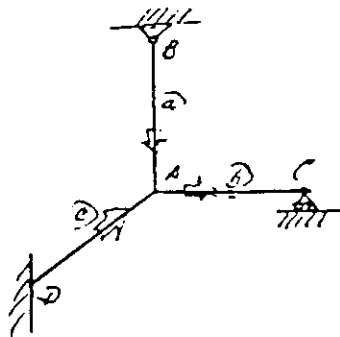
$$\begin{bmatrix} -1.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.07 & 4.145 \\ 4.145 & 240. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2625 \text{ m} \\ 0.0099 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 12..- Calcular los desplazamientos de todos los nudos de la estructura representada en la figura, así como la reacción en el nudo de la misma, cuando la barra AB sufre un aumento de temperatura de 20°C y el apoyo C un descenso de 2 cm.

Datos: Para todas las barras: $EI = 6.25 \cdot 10^3 \text{ m}^2\text{T}$; $EA = 300 \cdot 10^3 \text{ T}$
 $E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$; $\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$





$$\begin{aligned} E &= 2 \times 10^5 \text{ T/m}^2 \\ \alpha &= 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ EA &= 300 \times 10^3 \text{ T} \\ EI &= 6.25 \times 10^9 \text{ m}^4 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= 20^\circ\text{C} \\ \delta_c &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \\ \Sigma M_A \\ x_c = 0 \\ y_c \\ M_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22}^a + k_{22}^c + k_{11}^b & k_{12}^b \\ k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_c \\ v_c = -2 \text{ cm} \\ \theta_c \end{Bmatrix}$$

Vector de cargas: Debido al ΔT

$$N = EA \alpha \Delta T = 300 \times 10^3 \times 10^{-5} \Delta T = 3 \Delta T \Rightarrow P_A' = \begin{Bmatrix} 3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

análogo:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

MATRICES ELEMENTALES:

$$k_{22}^c = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 32.64 & 28.512 & 0.9 \\ 28.512 & 21.984 & -1.2 \\ 0.9 & -1.2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$k_{22}^a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 3.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & -0.75 \\ 0 & 60 & 0 \\ -0.75 & 0 & 3.75 \end{bmatrix}$$



$$K_{AP} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.75 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0.75 & 3.75 & 0 & -0.75 & 0 \\ -60 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & -0.15 & -0.75 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \\ 0 \\ Y_C \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 98.766 & 28.512 & 0.15 & -60 & 0 \\ 28.512 & 82.134 & -0.45 & 0 & -0.15 \\ 0.15 & -0.45 & 12.5 & 0 & -0.75 \\ -60 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & -0.15 & -0.75 & 0 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_C \\ v_C = -2 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 98.766 u_A + 28.512 v_A + 0.15 \theta_A - 60 u_C - \\ -0.063 &= 28.512 u_A + 82.134 v_A - 0.45 \theta_A \\ -0.015 &= 0.15 u_A - 0.45 v_A + 12.5 \theta_A \\ 0 &= -60 u_A + 60 u_C \\ 10^{-3} Y_C &= -0.15 v_A - 0.75 \theta_A + 0.003 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_A = u_C} \quad \boxed{Y_C = -10^3 [0.15 u_A + 0.75 \theta_A + 0.003] = -1.9087 \text{ T}}$$

$$\begin{cases} 38.766 u_A + 28.512 v_A + 0.15 \theta_A = 0 \\ 28.512 u_A + 82.134 v_A - 0.45 \theta_A = -0.063 \\ 0.15 u_A - 0.45 v_A + 12.5 \theta_A = -0.015 \end{cases}$$

$$u_A = +0.770796 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_A = -1.041444 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_A = -1.24679 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

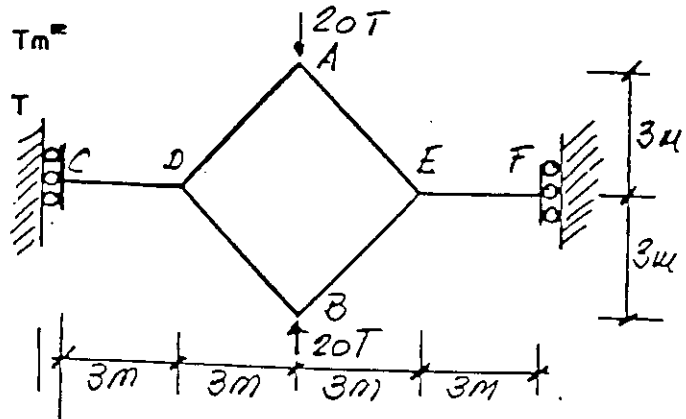
Revisión.

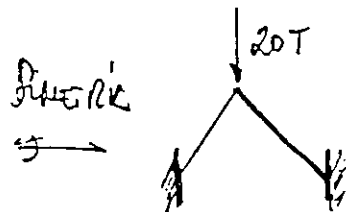
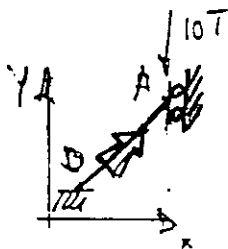
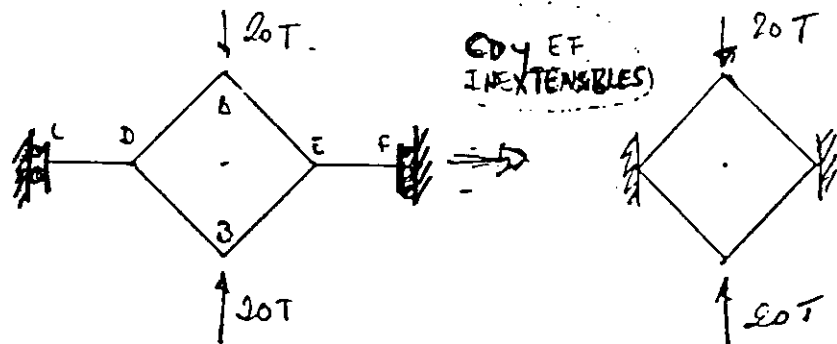
(~~Revisión~~?)

PROBLEMA 22..- Calcular el movimiento relativo entre los puntos A y B de la estructura de la figura, así como dibujar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiales de todas sus barras.

Las barras CD y EF se suponen inextensibles y para el resto se tiene: $E \cdot I = 6 \cdot 10^4 \text{ Tm}^2$

$$E \cdot A = 3 \cdot 10^4 \text{ T}$$





A y B solo tienen
MOVIMIENTO VERTICAL

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 7071.07 & 0 & 0 \\ 0 & 9428.07 & -20000 \\ 0 & -20000 & 56568.54 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7071.07 & 0 & 0 \\ 0 & 9428.07 & -20000 \\ 0 & -20000 & 56568.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8249.52 & -1178.507 & 14142.136 \\ -1178.507 & 8249.58 & -14142.136 \\ 14142.136 & -14142.136 & 56568.54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ -10 \\ M \end{Bmatrix} = K_{22} \begin{Bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-10 = 8249.58 + V$$

$$V = -\frac{10}{8249.58} = -0.0012 \text{ m} = -0.12 \text{ cm.}$$

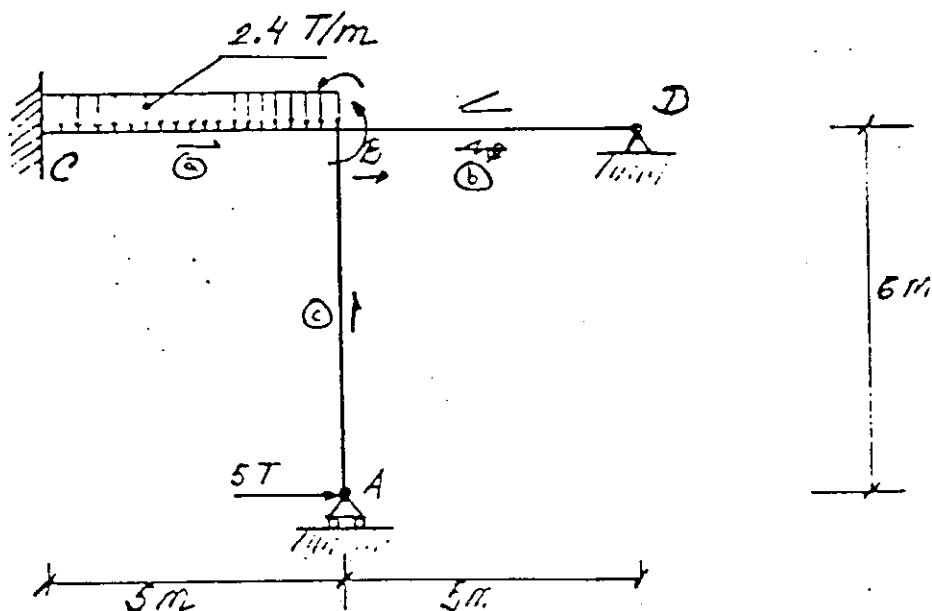
$$X = -1178.507 + (-0.0012) = 1.4286 \text{ T} \quad \left| \quad M = -14142.136 \times (-0.0012) = 17108 \text{ mT} \right.$$

PROBLEMA 2.- Calcular por métodos matriciales los movimientos en el nudo B de la estructura representada en la figura.

DATOS: Para todas las barras $E = 2 \cdot 10^4 \text{ T/m}^2$

$\lambda = 0.15 \text{ m}^3$

$I = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

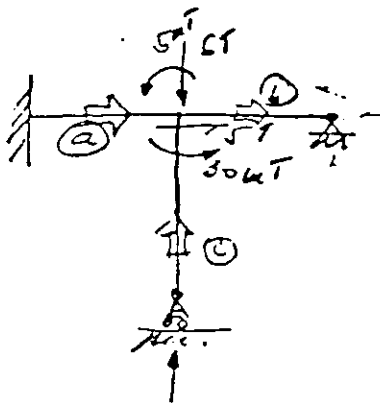




$$\begin{aligned} M_B &= \frac{PL^2}{12} = \frac{2.4 \times 25}{12} = 5 \text{ MT} \\ Y_B &= \frac{PL}{2} = \frac{2.4 \times 5}{2} = 6 \text{ T} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} M'_B &= P \cdot L = 5 \times 6 = 30 \text{ MT} \\ X_B &= 5 \text{ T} \end{aligned} \right\}$$

$$EI = 6250 \text{ u}^2 \text{ T}$$

$$EA = 3 \times 10^5 \text{ T}$$



$$\begin{bmatrix} P_C \\ P_B \\ P_D \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 10 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 10 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_C \\ d_B \\ d_D \\ d_D \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{22}^{(a)} + K_{11}^{(b)} + K_{22}^{(c)} \end{bmatrix}$$

Desplazamiento

$$K_{22}^{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -1500 \\ 0 & -1500 & 5000 \end{bmatrix}$$

U. articulo

$$K_{11}^{(b)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 750 \\ 0 & 750 & 3750 \end{bmatrix}$$

Los articulos

$$K_{22}^{(c)} = L_D \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 \\ 0 & 50750 & -750 \\ 0 & -750 & 3750 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 35 \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$



$$\theta_B = \frac{\begin{bmatrix} 120000 & 0 & 5 \\ 0 & 50750 & -6 \\ 0 & -750 & 35 \end{bmatrix}}{\Delta} = 4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$
$$\Delta = 5.322 \times 10^{13}$$

$$u_B = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & 50750 & -250 \\ 35 & -750 & 2750 \end{bmatrix}}{\Delta} = 4.1657 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$v_B = \frac{\begin{bmatrix} 120000 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -250 \\ 0 & 35 & 2750 \end{bmatrix}}{\Delta} = -5.92 \times 10^{-5} \text{ m}$$

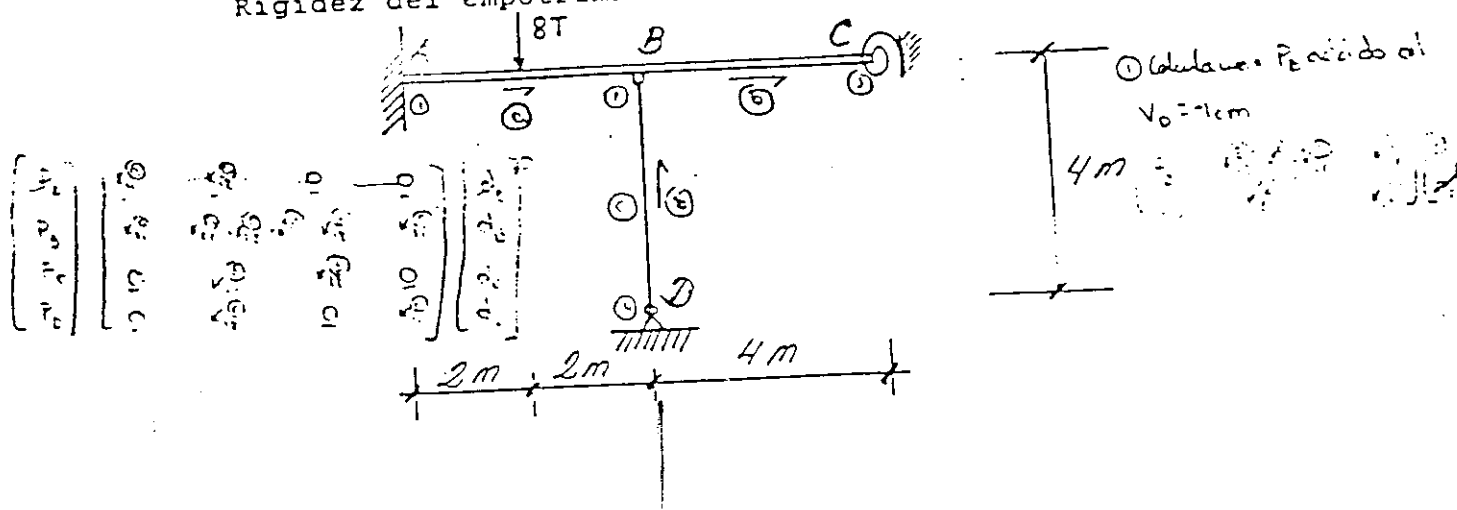
PROBLEMA 1°. - Calcular por métodos matriciales los movimientos de los nudos de la estructura representada en la figura, si además de la carga que se indica el nudo D sufre un descenso de 1 cm.

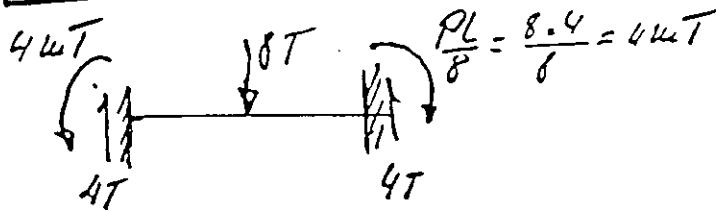
DATOS: Barras AB y BC : $E \cdot A = 50 \cdot 10^6 \text{ kg}$

$E \cdot I = 50 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}^4$

Barra BD : $E \cdot A = 10 \cdot 10^6 \text{ kg}$

Rigidez del empotramiento elástico en C : $K_r = 100 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{kg/rad}$



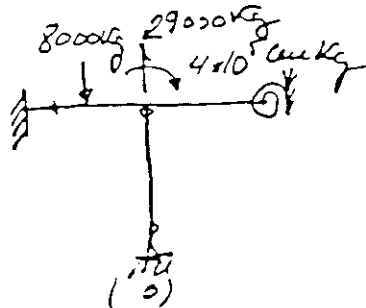


$$\sigma = \frac{N}{A} = E \epsilon = E \frac{\delta}{L}$$

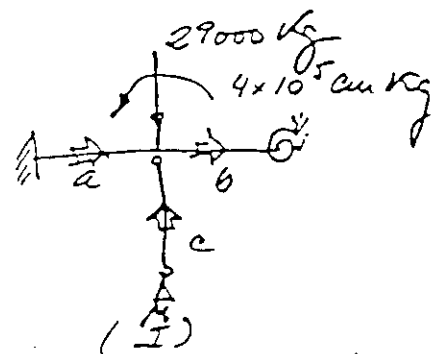
$$N = \delta \frac{EA}{L}$$

$$= 1 \frac{10 \times 10^6}{400} = 25000 \text{ kg}$$

ESTR =



+



Estados en el que solo
se producen esfuerzos (no hay mov. laterales)

Estados en el que hay
movimientos y esfuerzos

Por tanto como pide movimientos solo hay que calcular
el estado (I).

Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^b + K_{11}^c & K_{12}^b \\ K_{21}^b & K_{22}^b + K_{22}^c \end{bmatrix}$$

Debido al apoyo elástico

$$K_{11}^a = K_{22}^b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 9.38 & -1875 \\ 0 & -1875 & 5 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^b = 10^9 \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 9.38 & 1875 \\ 0 & 1875 & 5 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^b = [K_{21}^b]^T = \begin{bmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & -9.38 & 1875 \\ 0 & -1875 & 2.5 \times 10^5 \end{bmatrix}$$



$$K_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{\delta}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -29 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & -125 & 0 \\ 0 & 43.76 & 0 & 0 & -7.38 & 1875 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 & -1875 & 2.5 \times 10^5 \\ -125 & 0 & 0 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & -7.38 & -1875 & 0 & 9.38 & -1875 \\ 0 & 1875 & 2.5 \times 10^5 & 0 & -1875 & 6 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \\ 0 \\ 0 \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -29 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 43.76 & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 10^6 & 2.5 \times 10^5 \\ 0 & 1875 & 2.5 \times 10^5 & 6 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

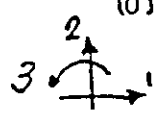
$$u_B = 0$$

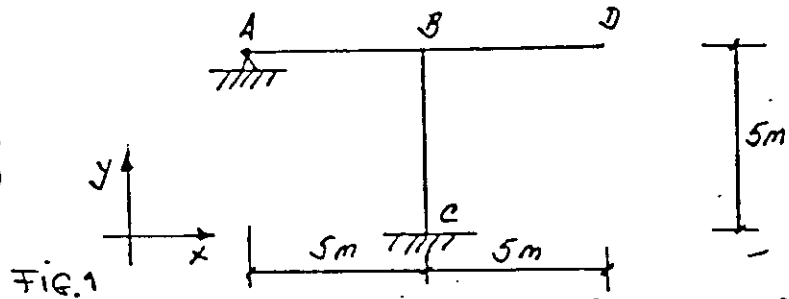
$$v_B = \frac{\begin{vmatrix} -29 & 0 & 1875 \\ 400 & 10^6 & 2.5 \times 10^5 \\ 0 & 2.5 \times 10^5 & 6 \times 10^5 \end{vmatrix}}{\Delta} = - \frac{15,400,000 \times 10^6}{\Delta} = -0.7698 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \frac{\begin{vmatrix} 43.76 & -29 & 1875 \\ 0 & 400 & 2.5 \times 10^5 \\ 1875 & 0 & 6 \times 10^5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -2.25 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_C = +2.5 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

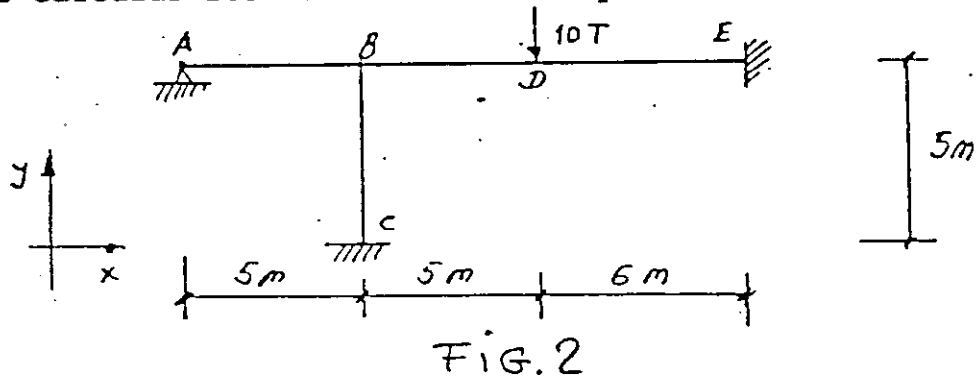
PROBLEMA 22.- En la estructura de la figura 1, todas las barras son de sección constante de 0.3 m por 0.5 m (ancho * canto). Obtener los movimientos del punto D, cuando sobre él se aplican los siguientes vectores de carga:

$$P_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad P_2^D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad P_3^D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$


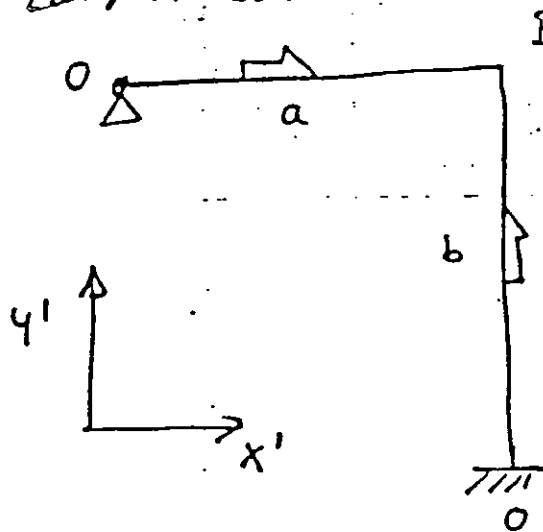


Se considera ahora la estructura de la figura 2, en la que se debe tener en cuenta que su parte izquierda es igual a la de la figura 1 y la barra DE es de sección constante de 0.3 m por 0.4 m (ancho * canto).

Se pide calcular los movimientos de D y las reacciones en E.



~~calcular~~ Calcular los movimientos de B, trasladando las cargas.
vectores cargas en B.



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de rigidez de la estructura

$$K = \begin{pmatrix} K'_{22a} + K'_{22b} \end{pmatrix}$$

K'_{22a} - barra apoyada y empotrada

K'_{22b} - barra empotrada

$$K_{22c} = \begin{pmatrix} \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$T_a = I$$

$$\text{luego } K_{22a} = K'_{22a}$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2 \quad I = 3'125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad \Omega = 0'15 \text{ m}^2$$

$$EI = 6250 \text{ m}^2 \text{Tm} \quad E\Omega = 3 \cdot 10^5 \text{ Tm}$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 60.000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & -750 \\ 0 & -750 & 3750 \end{pmatrix}$$

$$K_{22b} = \begin{pmatrix} \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -1500 \\ 0 & -1500 & 500 \end{pmatrix}$$

$$T_b = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 90^\circ$

$$K'_{22b} = T K_{22b} T^T = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 1500 \\ 0 & 60000 & 0 \\ 1500 & 0 & 5000 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 60.600 & 0 & 1500 \\ 0 & 60.150 & -750 \\ 1500 & -750 & 8750 \end{pmatrix}$$

$P = K d$; $d = K^{-1} P$; luego tenemos que calcular K^{-1}

$$K^{-1} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 16'572 & -35'46 \cdot 10^{-3} & -2'844 \\ -35'46 \cdot 10^{-3} & 15'643 & 1'433 \\ -2'844 & 1'433 & 114'89 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \omega \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16'57 \cdot 10^{-6} \\ -35'46 \cdot 10^{-9} \\ -2'84 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \parallel \quad \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta \omega \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1'425 \cdot 10^{-5} \\ 2'39 \cdot 10^{-5} \\ 5'758 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \omega \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2'844 \cdot 10^{-6} \\ 1'433 \cdot 10^{-6} \\ 114'89 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

estos son los movimientos del ~~punto~~ nudo B.

$$d_B = d_B^* \quad \text{y} \quad d_D^* = H^t d_B^*$$

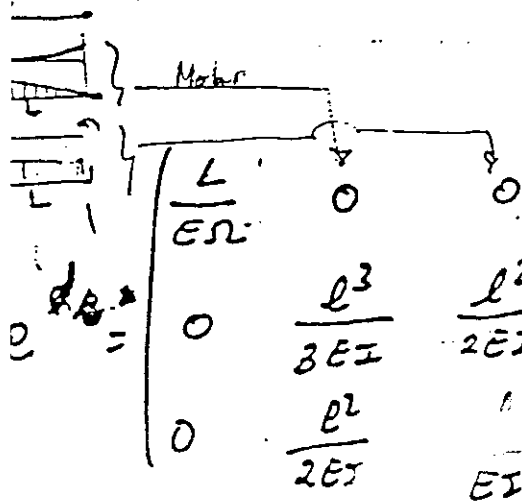
$$d_D = e + d_D^* = e + H^t d_B^* \rightarrow e + H^t d_B$$

$$\boxed{d_D = e + H_{BD}^t d_B}$$

e - movimientos de D cuando B está sujeta

$$P_B = -H_{BC} P_D$$

$$H_{BC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$



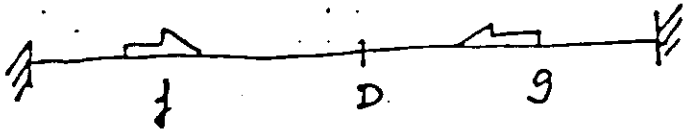
$$e_{AB} = \begin{vmatrix} \frac{L}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1'66 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 6'67 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-3} & 8 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}$$

$$d_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d_B + \begin{vmatrix} 1'66 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 6'67 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-3} & 8 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}$$

$$F_{AB} = \begin{vmatrix} 3'317 \cdot 10^{-5} & -1'425 \cdot 10^{-5} & -2'844 \cdot 10^{-6} \\ -1'142 \cdot 10^{-5} & 9'5728 \cdot 10^{-3} & 2'576 \cdot 10^{-3} \\ -2'844 \cdot 10^{-6} & ~~5'4069 \cdot 10^{-4}~~ & 2'576 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{F_x \quad F_y \quad M_D}$$

parte ABCD de la estructura la sustituiré por una barra tal que sea equivalente; y con $e = F \rho_2$ siendo e los momentos de D.



$$K_T = (K'_{22})_f + (K'_{22})_g \quad \text{siendo } (K'_{22})_f = F^{-1}$$

$$(K'_{22})_f = \begin{vmatrix} 29'814 & -3'1337 & 11'81 \\ -3'1337 & -28'523 & 106'366 \\ 11'81 & 106'366 & -395'21 \end{vmatrix} 10^3$$

$$K_{22})_S = \begin{vmatrix} \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4'8 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 177'78 & -533'33 \\ 0 & -533'33 & 2133'33 \end{vmatrix}$$

$$EI = 2'4 \cdot 10^5$$

$$EI = 3200$$

$$T_g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(K'_{22})_S = T K_{22} T^T$$

$$(K'_{22}) = \begin{vmatrix} 40000 & 0 & 0 \\ 0 & 177'78 & +533'33 \\ 0 & 533'33 & 2133'37 \end{vmatrix}$$

$$K = 10^3 \begin{vmatrix} 69'814 & -3'1337 & 11'810 \\ -3'1337 & -28'345 & 106'899 \\ 11'810 & 106'899 & -393'076 \end{vmatrix}$$

4) moments en D.

$$d_D = K^{-1} P \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 100 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_D = 10^{-5} \begin{pmatrix} 1'4253 & -0'15453 & 7'989107 \\ -0'15453 & 137'62 & 37'422 \\ 7'989107 & 37'422 & 9922'7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{x2} = 15453 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0'0154 \text{ mm}$$

$$\delta_{y2} = -137'62 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -13'762 \text{ mm}$$

$$\theta_2 = -37'422 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = -3'7422 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Reactions en E

$$P_1 = K_{11} d_1 + K_{12} d_2$$

$$P_2 = K_{21} d_1 + K_{22} d_2$$

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_1 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 533'33 \\ 0 & 533'33 & 1066'67 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -177'77 & 533'33 \\ 0 & -533'33 & 1066'67 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1'5452 \\ -1376'2 \\ -374'22 \end{pmatrix} 10^{-5} = \begin{pmatrix} 0'618 \\ 0'4508 \\ 3'348 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1º..- Calcular los movimientos del nudo B de la estructura representada en la figura, si además de las cargas indicadas, el tirante BD se enfría 30°C y el apoyo A se desplaza 3mm horizontalmente hacia el lado izquierdo.

Datos:

Del semiempotramiento se sabe que gira $4 \cdot 10^{-4}$ rad al aplicarle un momento de 1 mT.

Para la barra BD: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$

$A = 20 \text{ cm}^2$

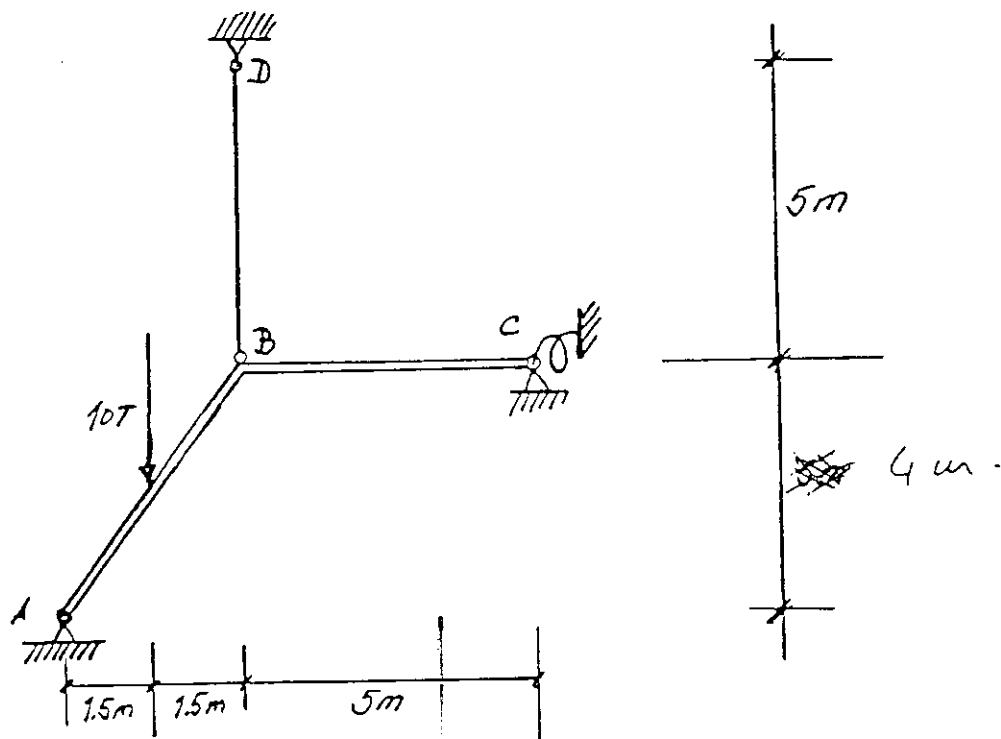
$\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

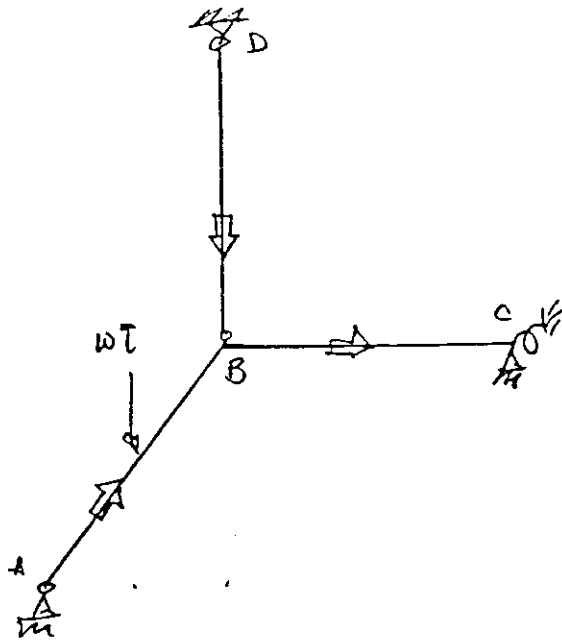
Para el resto de las barras : $I = 4.17 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

$A = 0.2 \text{ m}^2$

$E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

Nota: Plantear una ecuación matricial de 3×3 para su resolución.





$$P = K \delta \Rightarrow K = \frac{P}{\delta} = 4 \times 10^{-4}$$

Barra BD

$$K_{22}^{BD} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow K_{22}^{BD} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra AB:

$$K_{22}^{AB} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & -1000 \\ 0 & -1000 & 5000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{AB} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & -1000 \\ 0 & -1000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

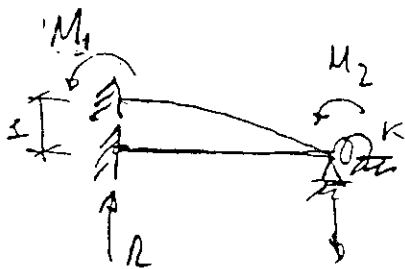
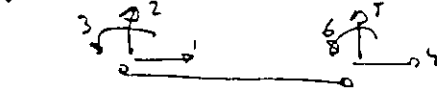
$$= \begin{bmatrix} 28728 & 38304 & 800 \\ 38304 & 51272 & -600 \\ 800 & -600 & 5000 \end{bmatrix}$$



Barra BC:

$$\begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ M_B \\ X_C \\ Y_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -8 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 2000 & 0 & -8000 & 2000 \\ 0 & 2000 & 6672 & 0 & -2000 & 3336 \\ -8 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 8 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -2000 & 0 & 8000 & -2000 \\ 0 & 2000 & 3336 & 0 & -2000 & 6672 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \\ u_C \\ v_C \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

Se puede eliminar u_C , v_C , θ_C de la forma matricial para quedarnos únicamente con la K_{11} modificada, o también:



$$\theta_3 = 0 = -\frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI} - \frac{1}{L}$$

$$\theta_6 = -K^{-1} M_2 = -4 \cdot 10^4 M_2 = -\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{M_2 L}{3EI} - \frac{1}{L}$$

$$2M_1 - M_2 = \frac{6EI}{L^2} \Rightarrow M_2 = 2M_1 - \frac{6EI}{L^2}$$

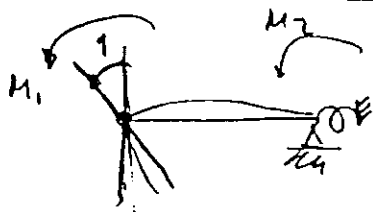
$$-4 \cdot 10^4 \left(2M_1 - \frac{6EI}{L^2} \right) = -\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{L}{3EI} \left(2M_1 - \frac{6EI}{L^2} \right) - \frac{1}{L}$$

$$-8 \cdot 10^4 M_1 + \frac{24 \cdot 10^4 EI}{L^2} = -\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{2L M_1}{3EI} - \frac{2}{L} - \frac{1}{L}$$

$$\left(+8 \cdot 10^4 - \frac{L}{6EI} + \frac{2L}{3EI} \right) M_1 = \frac{3}{L} + \frac{24 \cdot 10^4 EI}{L^2}$$

$$M_1 = 1273.6$$

$$\Rightarrow M_2 = 2 \cdot 1273.6 - \frac{6EI}{L^2} = 545.6$$



$$\theta_j = 1 = \frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI}$$

$$\theta_6 = -4 \cdot 10^{-4} M_2 = -\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{M_2 L}{3EI}$$

$$M_1 \frac{L}{3EI} = 1 + \frac{M_2 L}{6EI} \Rightarrow M_1 = \frac{3EI}{L} + \frac{M_2}{2}$$

$$-4 \times 10^{-4} M_2 = -\frac{L}{6EI} \left(\frac{3EI}{L} + \frac{M_2}{2} \right) + \frac{M_2 L}{3EI}$$

$$\left(\frac{L}{3EI} - \frac{L}{12EI} + 4 \times 10^{-4} \right) M_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow M_2 = 909.3$$

$$M_1 = \frac{909.3}{2} + \frac{3EI}{L} = 5458.64$$

Por tanto:

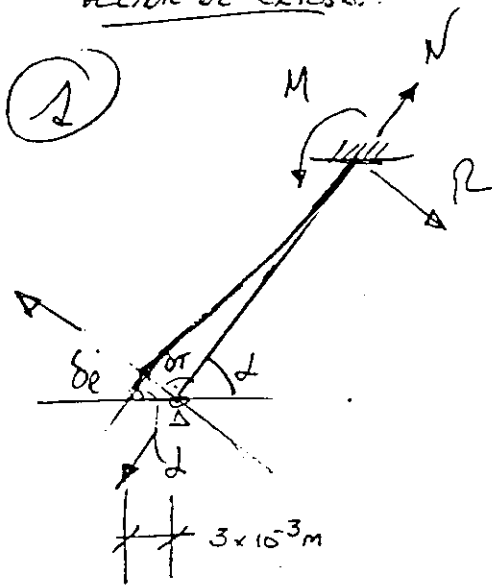
$$K_{11}^{8C} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 545.6 & 1273.6 \\ 0 & 1273.6 & 5458.64 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura:

$$\underline{K} = \underline{K}_{22}^{8B} + \underline{K}_{22}^{8D} + \underline{K}_{11}^{8C} = \begin{bmatrix} 108928 & 38304 & 800 \\ 38304 & 59817.6 & 673.6 \\ 800 & 673.6 & 10458.64 \end{bmatrix}$$



VECTOR DE CARGAS:



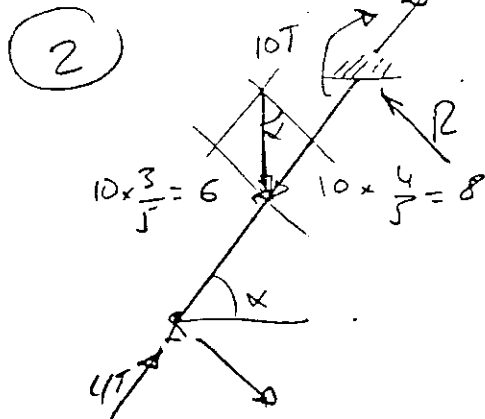
$$\delta_T = 3 \times 10^{-3} \sin \alpha = 3 \times 10^{-3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} 10^{-3}$$

$$\delta_L = 3 \times 10^{-3} \cos \alpha = 3 \times 10^{-3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5} 10^{-3}$$

Este supone: $Axial = N = \frac{9}{5} 10^{-3} 80000 \text{ T} = 144 \text{ T}$

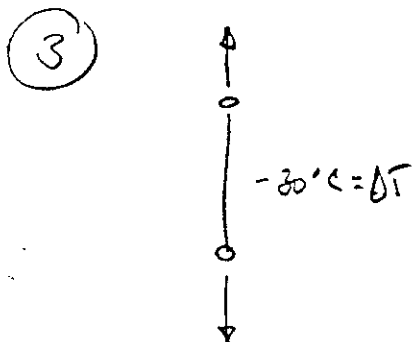
$$\text{Momento} = M = \frac{3EI}{L^2} \delta_T = 2.4 \text{ mT}$$

$$\text{Cortante} = R = \frac{M}{L} = \frac{2.4}{5} = 0.48 \text{ T}$$



$$0 = \frac{M \delta}{3EI} - \frac{6L^2}{16EI} \Rightarrow M = 5.63 \text{ mT}$$

$$R = \left(6 \frac{L}{2} + M \right) \frac{1}{L} = 4.13 \text{ T}$$



$$N = EA \alpha \Delta T = 4000 \times 10^{-5} \times 30 = 12 \text{ T}$$

VECTOR DE CARGAS:

$$Q_B = \left\{ \begin{array}{l} -144 \frac{3}{5} - 0.48 \frac{L}{5} - 4 \frac{3}{5} + 4.13 \frac{4}{5} \\ -144 \frac{4}{5} + 0.48 \frac{3}{5} - 4 \frac{4}{5} - 4.13 \frac{3}{5} + 12 \\ -2.4 + 5.63 \end{array} \right\}$$



Resultado:

$$\begin{Bmatrix} -85.86 \\ -108.59 \\ 3.25 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 108928 & 36304 & 800 \\ 36304 & 59817.6 & 673.6 \\ 800 & 673.6 & 10458.54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

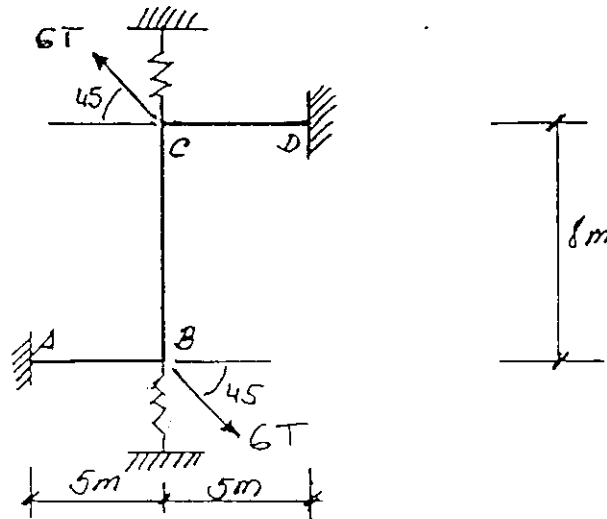
PROBLEMA 1°.- Calcular matricialmente los movimientos en los nudos de la estructura, sus reacciones y esfuerzos en los resortes, si además de las fuerzas que se indican, las barras AB y CD sufren un incremento de temperatura de $30\text{ }^{\circ}\text{C}$.

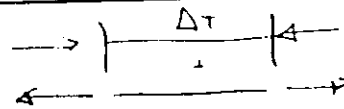
Datos : La sección de todas las barras es (ancho, alto)=(0.3m,0.4m)

$E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

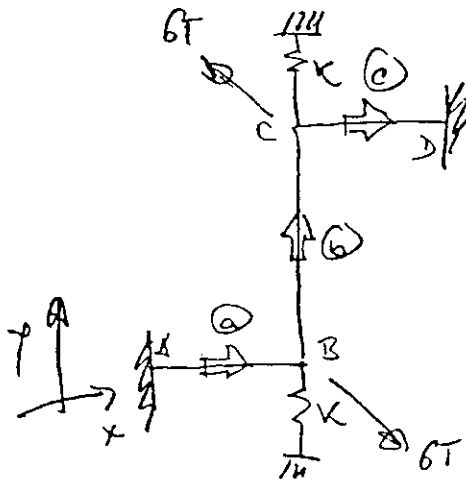
$\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

Para ambos resortes, su rigidez es $K = 200. \text{ T/m}$





$$N = EA \alpha \Delta T = 72 \text{ T}$$



VECTOR DE CARGA:

$$\underline{P}_B = \begin{Bmatrix} 6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 76.2426 \\ -4.2426 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_C = \begin{Bmatrix} -6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -72 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -76.2426 \\ 4.2426 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

BARRA a y c $A = 0.3 \times 0.4 = 0.12 \text{ m}^2$

$$I = \frac{1}{12} 0.3 \times 0.4^3 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\underline{K}_{22}^a = \begin{bmatrix} 48000 & 0 & 0 \\ 0 & 307.2 & -768 \\ 0 & -768 & 2560 \end{bmatrix}; \quad \underline{K}_{11}^c = \begin{bmatrix} 48000 & 0 & 0 \\ 0 & 307.2 & 768 \\ 0 & 768 & 2560 \end{bmatrix}$$

BARRO D:

$$(\alpha = 90^\circ) \quad \underline{K}_{22}^b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30000 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & -300 \\ 0 & -300 & 1600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 0 & 300 \\ 0 & 30000 & 0 \\ 300 & 0 & 1600 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{11}^b = \begin{bmatrix} 75 & 0 & -300 \\ 0 & 30000 & 0 \\ -300 & 0 & 1600 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{12}^b = \begin{bmatrix} -75 & 0 & -300 \\ 0 & -30000 & 0 \\ 300 & 0 & 800 \end{bmatrix}$$

Muelles: $\underline{K}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{P} = \underline{K} \underline{\delta} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \underline{P}_B \\ \underline{P}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{22}^a + \underline{K}_{11}^b + \underline{K}_u & \underline{K}_{12}^b \\ \underline{K}_{21}^b & \underline{K}_{22}^b + \underline{K}_{11}^c + \underline{K}_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_B \\ \underline{\delta}_C \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} 76.2426 \\ -4.2426 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48075 & 0 & -300 \\ 0 & 30507.2 & -768 \\ -300 & -768 & 4160 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -75 & 0 & -300 \\ 0 & -30000 & 0 \\ 200 & 0 & 800 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

$u_B = u_C$
 $v_B = v_C$
 $\theta_B = \theta_C$

$$\begin{aligned} 76.2426 &= 48075 u_B + 0 - 300 \theta_B + 75 u_B + 0 - 300 \theta_B \\ -4.2426 &= 30507.2 v_B - 768 \theta_B + 0 + 30000 v_B + 0 \\ 0 &= -300 u_B - 768 v_B + 4160 \theta_B + 200 u_B + 0 + 800 \theta_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76.2426 &= 48150 u_B - 600 \theta_B \\ -4.2426 &= 60507.2 v_B - 768 \theta_B \\ 0 &= -600 u_B - 768 v_B + 4960 \theta_B \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_B = 1.586 \times 10^{-3} \\ v_B = -6.782 \times 10^{-5} \\ \theta_B = 1.818 \times 10^{-4} \end{cases}$$

REACCIONES:

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \end{Bmatrix} = K_{12}^a \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48000 & 0 & 0 \\ 0 & -307.2 & 768 \\ 0 & -768 & 800 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reacción Temperature.

EST. EN VUELLES.

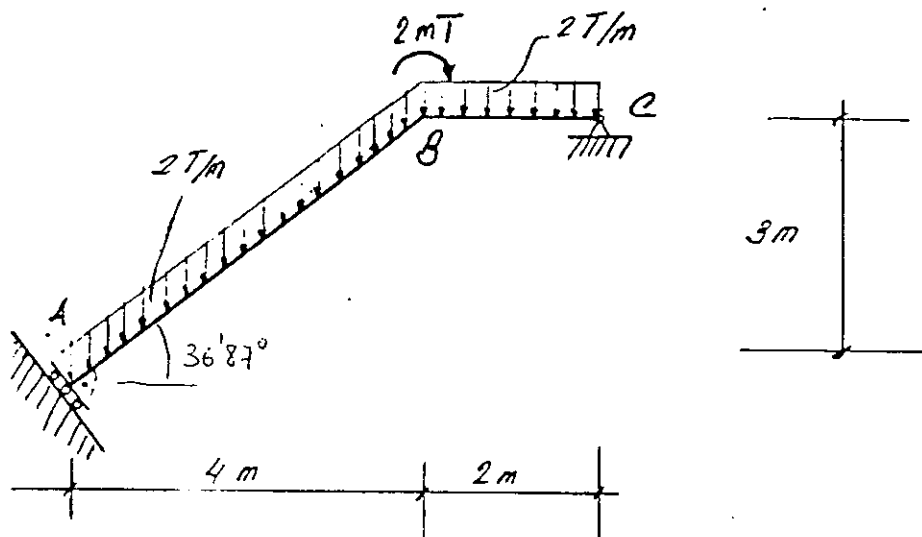
$$P = K \delta = 200 * 6.782 \times 10^{-5} =$$

PROBLEMA 12.- Plantear la ecuación matricial para el cálculo de los desplazamientos, giros en todos los nudos, así como reacciones en la estructura representada en la figura.

Datos: Para todas las barras $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$I = 10^4 \text{ cm}^4$

$A = 40 \text{ cm}^2$



Aunque el problema puede resolverse en un único sistema de coordenadas global (empleando como sistema global el $X'-Y'$ de la figura 2), se va a utilizar el sistema global $X-Y$, con objeto de mostrar la metodología general para apoyos inclinados.

Los sistemas de coordenadas global y locales son los de la figura 2.

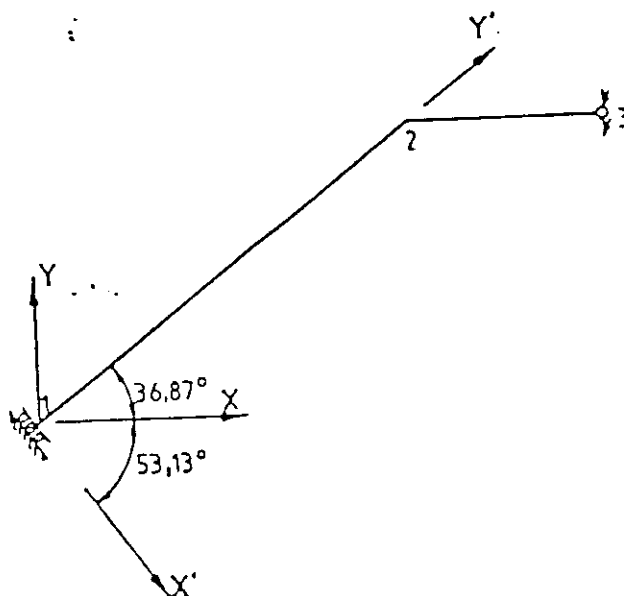


Figura 2. Sistemas de coordenadas global y locales

El proceso a seguir es el siguiente:

1. Formar la matriz de rigidez de la estructura en el sistema de coordenadas $X-Y$;
2. Calcular las fuerzas equivalentes en los nudos, en el sistema de coordenadas $X-Y$;
3. Realizar cambios en la matriz de rigidez obtenida anteriormente, para pasar las fuerzas equivalentes y los desplazamientos del nudo 1 al sistema $X'-Y'$;
4. Aplicar las condiciones de contorno según los sistemas de coordenadas $X-Y$ y $X'-Y'$;
5. Obtener los desplazamientos;
6. Obtener los esfuerzos y reacciones.

El sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura, en el sistema $X-Y$, sin aplicar las condiciones de contorno es

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{SIM.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Las matrices de la diagonal principal son

$$K_{11} = K^2_{11}$$

$$K_{22} = K^1_{22} + K^3_{22}$$

$$K_{33} = K^2_{33}$$

Así pues, para formar el sistema de ecuaciones de equilibrio es necesario conocer las matrices K^2_{11} , K_{12} , K^1_{22} , K^3_{22} , K_{23} , K^2_{33} y los vectores de cargas P_1 , P_2 y P_3 .

Barra 1-2 ($\alpha = \arctan(3/4)$)

$$R_{12} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0.0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -10824.57 & -7967.23 & -302.40 \\ -7967.23 & -6177.02 & 403.20 \\ 302.4 & -403.20 & 840.00 \end{bmatrix}; \quad K^2_{11} = \begin{bmatrix} 10824.57 & 7967.23 & -302.40 \\ & 6177.02 & 403.20 \\ \text{SIMETRICA} & & 1680.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -10824.57 & -7967.23 & 302.40 \\ -7967.23 & -6177.02 & -403.20 \\ -302.4 & 403.20 & 840.00 \end{bmatrix}; \quad K^1_{22} = \begin{bmatrix} 10824.57 & 7967.23 & 302.40 \\ & 6177.02 & -403.20 \\ \text{SIMETRICA} & & 1680.00 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3 ($\alpha = \text{atan}(0/2)$)

$$R_{23} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0.0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} -42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3150.00 & 3150.00 \\ 0.0 & -3150.00 & 2100.00 \end{bmatrix}; \quad K_{32} = \begin{bmatrix} 42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ & 3150.00 & 3150.00 \\ \text{SIMETRICA} & & 4200.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} -42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3150.00 & -3150.00 \\ 0.0 & 3150.00 & 2100.00 \end{bmatrix}; \quad K_{13} = \begin{bmatrix} 42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ & 3150.00 & -3150.00 \\ \text{SIMETRICA} & & 4200.00 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura, en el sistema X-Y, es

10824.6	7967.2	-302.4	-10824.6	-7967.2	-302.4	0.0	0.0	0.0
	6177.0	403.2	-7967.2	-6177.0	403.2	0.0	0.0	0.0
		1680.0	302.04	-403.2	840.0	0.0	0.0	0.0
SIMETRICA			52824.6	7967.2	302.4	-42000.0	0.0	0.0
				9327.0	2746.1	0.0	-3150.0	3150.0
					5880.0	0.0	-3150.0	2100.0
						42000.0	0.0	0.0
							3150.0	-3150.0

Para poder aplicar las condiciones de contorno en el nudo 1 hay que cambiar la matriz de rigidez de forma que los desplazamientos y fuerzas en el nudo 1 estén en el sistema $X'-Y'$.

Sea R_1 la matriz de rotación que pasa un vector del sistema $X-Y$ al sistema $X'-Y'$, en el nudo 1. La ecuación matricial 1 puede ponerse en la forma

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 K_{11} R_1^T & R_1 K_{12} & 0 \\ K_{21} R_1^T & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

en esta ecuación se cumple

$$P'_1 = R_1 P_1 \quad D'_1 = R_1 D_1 \quad R_1^T = R_1^{-1}$$

$$P_1 = R_1^T P'_1 \quad D_1 = R_1^T D'_1$$

la matriz de rigidez sigue siendo simétrica, ya que $(R_1 K_{11} R_1^T)$ es una matriz simétrica, y $(R_1 K_{12})^T = K_{12}^T R_1^T = K_{21} R_1^T$.

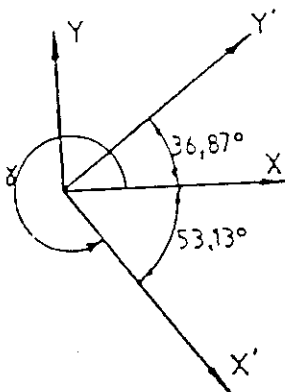


Figura 3. Rotación de sistemas de coordenadas

6 de 15

La matriz de rotación, de acuerdo con la figura 3, viene dada por

$$\tau = 360 - 53.13 = 306.87^\circ$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0.0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0.0 \\ 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 K_{11} R_1^T = \begin{bmatrix} 201.59 & 0.0 & -504.00 \\ & 16799.99 & 0.0 \\ \text{SIMETRICA} & & 1680.0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 K_{12} = \begin{bmatrix} -120.96 & 161.28 & -503.86 \\ -13439.99 & -10079.99 & -0.11 \\ 302.04 & -403.00 & 840.00 \end{bmatrix}$$

La nueva matriz de rigidez de la estructura es

$$\begin{bmatrix} 201.6 & 0.0 & -504.0 & -120.9 & 161.3 & -503.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 16799.9 & 0.0 & -13440.0 & -10080.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 1680.0 & 302.04 & -403.2 & 840.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \hline & & & 52824.6 & 7967.2 & 302.4 & -42000.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 9327.0 & 2746.1 & 0.0 & -3150.0 & 3150.0 \\ & & & & & 5880.0 & 0.0 & -3150.0 & 2100.0 \\ \hline \text{SIMETRICA} & & & & & & 42000.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & & & & 3150.0 & -3150.0 \\ & & & & & & & & 4200.0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las condiciones de contorno $D_{1Y} = D_{1Z} = D_{2X} = D_{2Y} = 0$, el

sistema de ecuaciones final a resolver es

$$\begin{bmatrix} 4.0 \\ 0.0 \\ -7.0 \\ 0.67 \\ 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201.6 & -120.9 & 161.3 & -503.9 & 0.0 \\ \hline & 52824.6 & 7967.2 & 302.4 & 0.0 \\ & & 9327.0 & 2746.1 & 3150.0 \\ & & & 5880.0 & 2100.0 \\ \hline \text{SIMETRICA} & & & & 4200.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{1x} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ G_{2z} \\ G_{3z} \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$D'_{1x} = 0.03344 \text{ m.}; \quad D_{2x} = 0.0005318 \text{ m.}; \quad D_{2y} = -0.003181 \text{ m.}$$

$$G_{2z} = 0.004296 \text{ rad.}; \quad G_{3z} = 0.0003948 \text{ rad.}$$

Fuerzas equivalentes

Barra 1-2

El vector de cargas en el sistema global es

$$F_{12}^T = (0.0, -2.0, 0.0)$$

El vector de cargas en el sistema local de la barra es

$$f_{12} = R_{12} F_{12} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

La matriz para obtener las fuerzas de empotramiento en el extremo i es

$$C_{ui} = \begin{bmatrix} -L/2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -L/2 & 0.0 \\ 0.0 & -L^2/12 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz en el extremo j se cambia de signo c_{12} .

Las fuerzas de empotramiento en el extremo 1 son

$$p_{12}^* = C_{11} f_{12} = \begin{bmatrix} -2.500 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.500 & 0.0 \\ 0.0 & -2.083 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.6 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.000 \\ 4.000 \\ 3.333 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas equivalentes

$$P_{12}^* = -R_{12}^T p_{12}^* = - \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.0 \\ 4.0 \\ 3.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ -3.333 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de empotramiento en el extremo 2 son

$$p_{21}^* = C_{22} f_{12} = \begin{bmatrix} -2.500 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.500 & 0.0 \\ 0.0 & 2.083 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.6 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.000 \\ 4.000 \\ -3.333 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas equivalentes

$$P_{21}^* = -R_{12}^T p_{21}^* = - \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.0 \\ 4.0 \\ -3.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ 3.333 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

El vector de cargas en el sistema global es

$$F_{23}^T = (0.0, -2.0, 0.0)$$

9 de 15

El vector de cargas en el sistema local de la barra es

$$f_{23} = R_{23} F_{23} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de empotramiento en el extremo 2 son

$$p'_{23} = C_{02} f_{23} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1/3 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas equivalentes

$$P'_{23} = -R'^T_{23} p'_{23} = - \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ -0.666 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de empotramiento en el extremo 3 son

$$p'_{32} = C_{03} f_{23} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1/3 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ -0.666 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas equivalentes

$$P'_{32} = -R'^T_{32} p'_{32} = - \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ -0.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas equivalentes en las barras de la estructura son las

10 de 15

representadas en la figura 4.

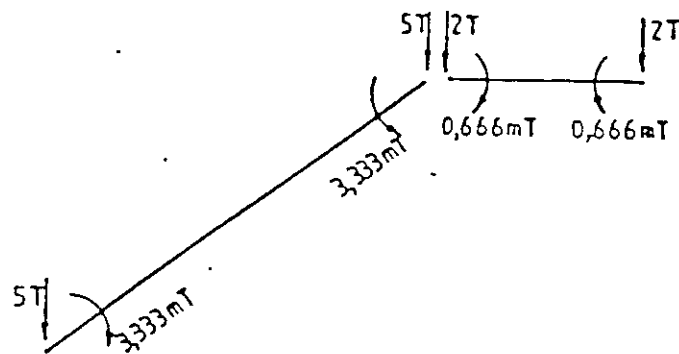


Figura 4. Fuerzas equivalentes en el sistema X-Y

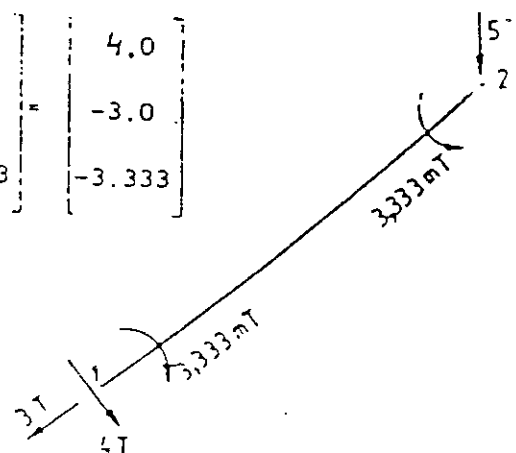
Así pues, las cargas totales sobre los nudos son

$$P_1 = P_{12} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ -3.333 \end{bmatrix}; \quad P_2 = P_{21} + P_{23} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -7.0 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = P_{32} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix}$$

Puesto que en el nudo 1 hay que tener las fuerzas en el sistema X'-Y'

$$P'_1 = R_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0.0 \\ 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ -3.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ -3.0 \\ -3.333 \end{bmatrix}$$



11 de 15

ESFUERZOS EN LAS BARRAS

Barra 1-2

$$P_{12} = -P^e_{12} + K^2_{11} D_1 + K_{12} D_2 = -P^e_{12} + K^2_{11} R_1^T D'_1 + K_{12} D_2$$

$$\begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ -3.333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10824.57 & 7967.23 & 302.40 \\ & 6177.02 & 403.20 \\ \text{SIMETRICA} & & 1680.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.0 \\ -0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03344 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -10824.57 & -7967.23 & -302.40 \\ -7967.23 & -6177.02 & 403.20 \\ 302.40 & -403.00 & 840.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0005318 \\ -0.003181 \\ 0.004296 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.332 \\ 16.751 \\ -8.469 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = R_{12} P_{12} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ P_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.332 \\ 16.751 \\ -8.469 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.916 \\ 0.0 \\ -8.469 \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = -P^e_{21} + K^1_{22} D_2 + K_{21} D_1 = -P^e_{21} + K^1_{22} D_2 + K_{21} R_1^T D'_1$$

$$\begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -5.0 \\ 3.333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10824.57 & 7967.23 & 302.40 \\ & 6177.02 & -403.20 \\ \text{SIMETRICA} & & 1680.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0005318 \\ -0.003181 \\ 0.004296 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -10824.57 & -7967.23 & 302.40 \\ -7967.23 & -6177.02 & -403.20 \\ -302.40 & 403.00 & 840.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.0 \\ -0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03344 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.332 \\ -6.751 \\ -11.526 \end{bmatrix}$$

12 de 15

$$P_{21} = R_{12} P_{21} = \begin{bmatrix} N_{21} \\ P_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -22.332 \\ -6.751 \\ -11.526 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.916 \\ 7.998 \\ -11.526 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

$$P_{23} = -P_{23}^* + K_{22}^3 D_2 + K_{23} D_3$$

$$= \begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ & 3150.00 & 3150.00 \\ \text{SIMETRICA} & & 4200.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.005318 \\ -0.003181 \\ 0.004296 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ & -3150.00 & 3150.00 \\ 0.0 & -3150.00 & 2100.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0003948 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.335 \\ 6.755 \\ 9.518 \end{bmatrix}$$

$$P_{23} = R_{23} P_{23} = \begin{bmatrix} N_{23} \\ P_{23} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.335 \\ 6.755 \\ 9.518 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.335 \\ 6.755 \\ 9.518 \end{bmatrix}$$

13 de 15

$$P_{32} = -P^e_{32} + K^2_{33} D_3 + K_{32} D_2$$

$$= \begin{bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \\ 0.666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ & 3150.00 & -3150.00 \\ \text{SIMETRICA} & & 4200.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0003948 \end{bmatrix}$$

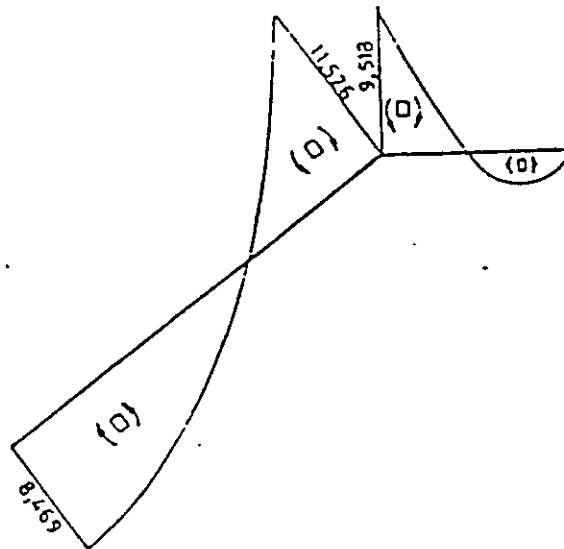
$$+ \begin{bmatrix} -42000.00 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3150.00 & -3150.00 \\ 0.0 & 3150.00 & 2100.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0005318 \\ -0.0031810 \\ 0.0042960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.335 \\ -2.755 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$P_{32} = R_{32} P_{32} = \begin{bmatrix} N_{32} \\ P_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -22.335 \\ -2.755 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.335 \\ -2.755 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

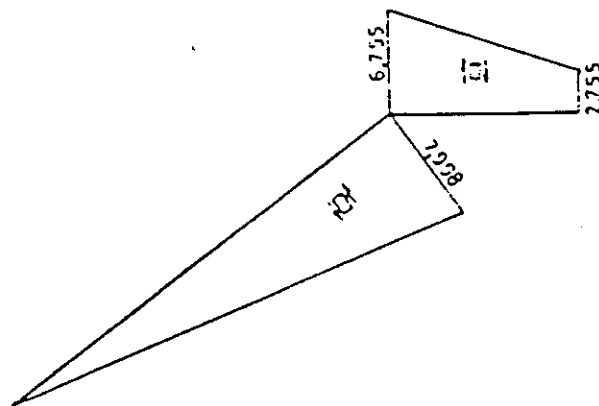
Flectores

(m*T)



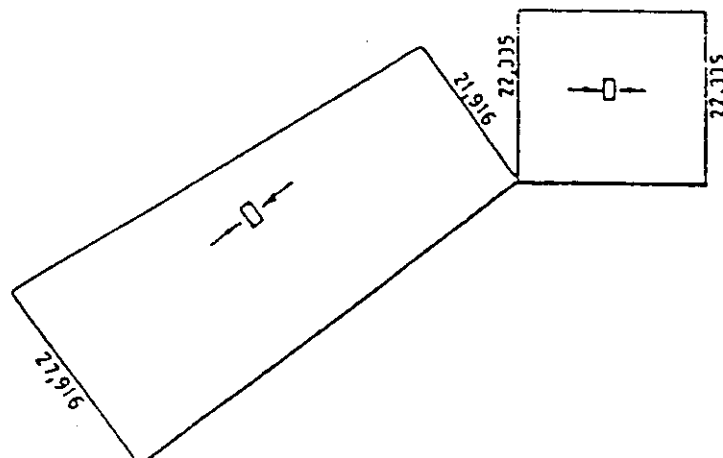
Cortantes

(T)



Axiles

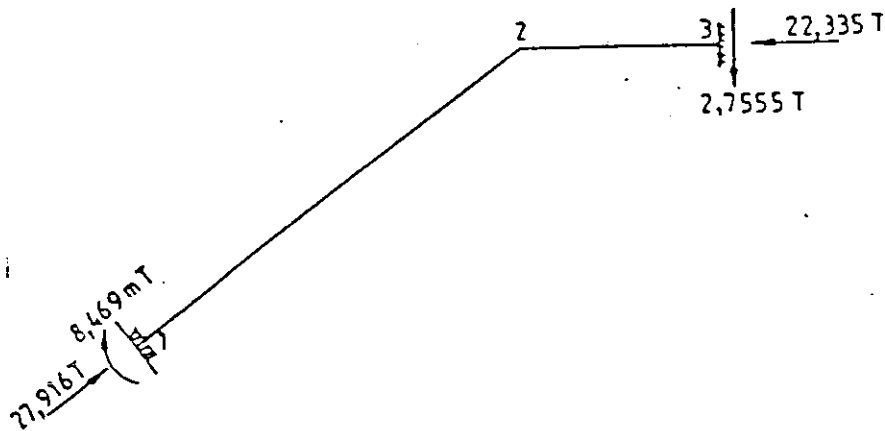
(T)



REACCIONES

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \end{bmatrix} = P'_{12} = R_1 P_{12} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0.0 \\ 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.332 \\ 16.751 \\ -8.469 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 27.916 \\ -8.469 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} R_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = P_{32} = \begin{bmatrix} -22.335 \\ -2.755 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

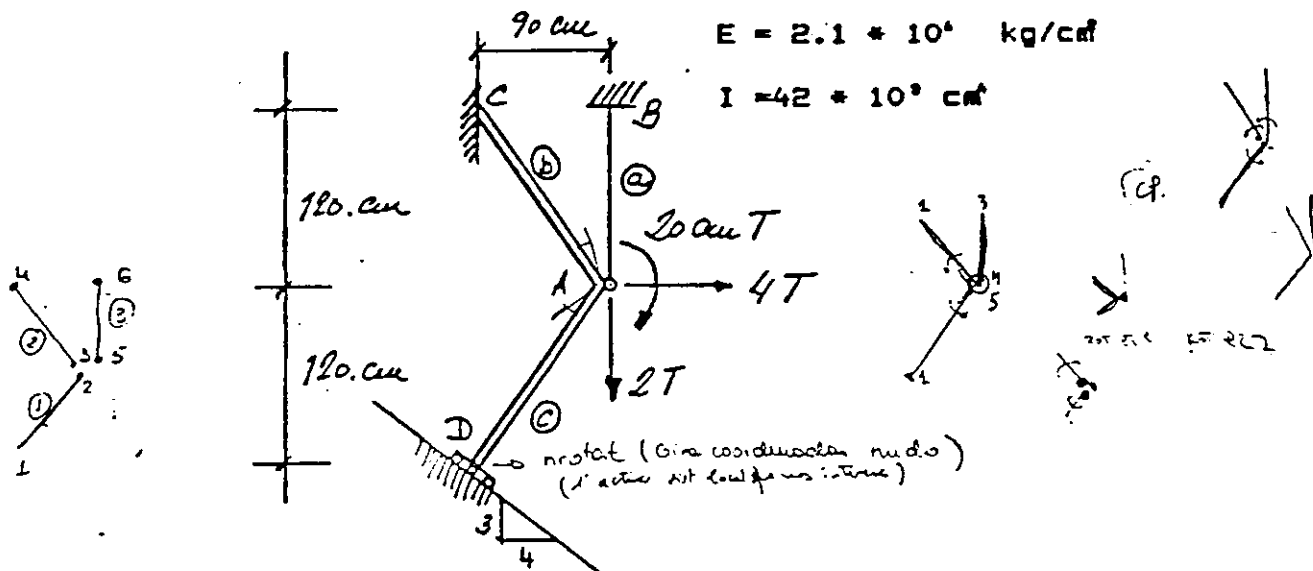


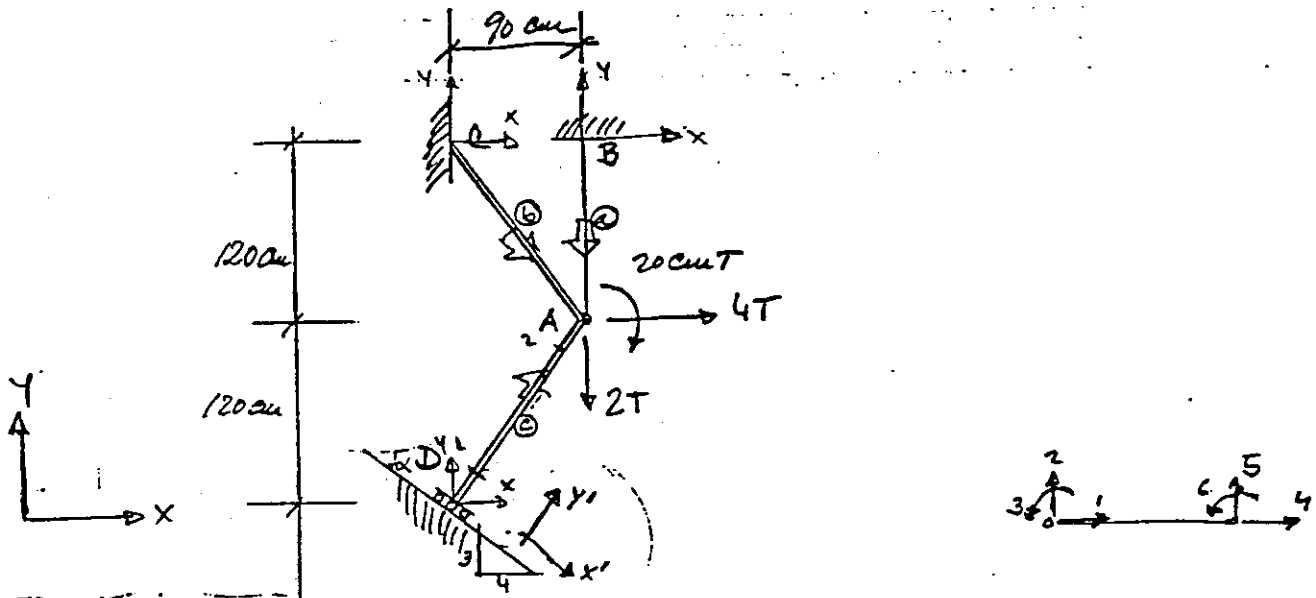
X **PROBLEMA 12.** - Calcular por métodos matriciales los movimientos de los nudos de la estructura representada en la figura.

Datos: Para todas las barras $A = 65 \text{ cm}^2 = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{65 \cdot 4}{\pi}}$

$E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$I = 42 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$





$$\underline{P}_D = \underline{L}^T \underline{P}_D'$$

$$\underline{u}_D = \underline{L} \underline{u}_D'$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{P}_A \\ \underline{L} \underline{P}_D' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & K_{21}^{(3)} \\ K_{12}^{(3)} & K_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_A \\ \underline{L} \underline{u}_D' \end{Bmatrix}$$

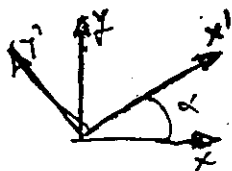
$$\underline{L}_{AC} = \underline{L}_{AD} = 150 \text{ cm}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{P}_A \\ \underline{P}_D' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \underline{L}_D \\ \underline{L}_D^T K_{21}^{(3)} & \underline{L}_D^T K_{11}^{(3)} \underline{L}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_A \\ \underline{u}_D' \end{Bmatrix}$$

$$\underline{L}_D = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices elementares:

$$\underline{K}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



$$\underline{K} = \underline{L} \underline{K}' \underline{L}^T$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{L}_D & 0 \\ 0 & \underline{L}_D \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_D = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Barra con articulación en el extremo 2:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_2 \\ M_3 \\ N_4 \\ V_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FL} \\ K_{LF} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_F \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

$$P_F = \left[K_{FF} - K_{FL} K_{LL}^{-1} K_{LF} \right] \delta_F$$

Operando:

$$K_{FL} K_{LL}^{-1} K_{LF} = \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} \frac{L}{4EI} \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{9EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{9EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$K_{FF} - K_{FL} K_{LL}^{-1} K_{LF} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez de la barra es:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_2 \\ M_3 \\ N_4 \\ V_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

3 de 5

Barra a

$$K_{22}^a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1137500 & 0 & 0 \\ 0 & 153125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153125 & 0 & 0 \\ 0 & 1137500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K_{22}^b = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 910 & 0 & 0 \\ 0 & 313.6 & -23520 \\ 0 & -23520 & 2352000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 528.304 & -286.272 & 18816 \\ -286.272 & 695.296 & 14112 \\ 18816 & 14112 & 2352000 \end{bmatrix}$$

Barra c:

$$K_{11}^c = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 910 & 0 & 0 \\ 0 & 313.6 & 23520 \\ 0 & 23520 & 2352000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 528.304 & 286.272 & -18816 \\ 286.272 & 695.296 & 14112 \\ -18816 & 14112 & 2352000 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^c = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -910 & 0 & 0 \\ 0 & -313.6 & 23520 \\ 0 & -23520 & 176000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -528.304 & -286.272 & -18816 \\ -286.272 & -695.296 & 14112 \\ 18816 & -14112 & 176000 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^c = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -910 & 0 & 0 \\ 0 & -313.6 & -23520 \\ 0 & 23520 & 117600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -528.304 & -286.272 & 18816 \\ -286.272 & -695.296 & -14112 \\ -18816 & 14112 & 176000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^c = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 910 & 0 & 0 \\ 0 & 313.6 & -23520 \\ 0 & -23520 & 2352000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 528.304 & 286.272 & 18816 \\ 286.272 & 695.296 & -14112 \\ 18816 & -14112 & 2352000 \end{bmatrix}$$



$$L_D = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \swarrow \alpha \\ \downarrow K \\ \searrow \end{array} \quad L_D = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^C L_D = 10^3 \begin{bmatrix} -528.304 & -286.272 & -18816 \\ -286.272 & -695.276 & 14112 \\ 18816 & -14112 & 1176000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -250.88 & -546 & -18816 \\ 188.16 & -728 & 14112 \\ 23520 & 0 & 1176000 \end{bmatrix}$$

$$L_D^T K_{21}^C = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} -528.304 & -286.272 & 18816 \\ -286.272 & -695.276 & -14112 \\ -18816 & 14112 & 1176000 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -250.88 & 188.16 & 23520 \\ -546 & -728 & 0 \\ -18816 & 14112 & 1176000 \end{bmatrix}$$

$$L_D^T K_{21}^C L_D = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 528.304 & 286.272 & -18816 \\ 286.272 & 695.276 & 14112 \\ 18816 & -14112 & 2352000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 313.6 & 0 & 23520 \\ 0 & 912 & 0 \\ 23520 & 0 & 2352000 \end{bmatrix}$$

b_c
 K_{22}

$$\begin{bmatrix} 4000 \\ -2000 \\ -20000 \\ 0 \\ R_{y1} \\ M_{D1} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1207.233 & 0 & 37632 & -250.88 & -546 & -18816 \\ 0 & 2528.092 & 0 & 188.16 & -728 & 14112 \\ 37632 & 0 & 4704000 & 23520 & 0 & 1176000 \\ -250.88 & 188.16 & 23520 & 313.6 & & \\ -546 & -728 & 0 & & & \\ -18816 & 14112 & 1176000 & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_A = 3.8437 \cdot 10^{-3} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_A = -1.583 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \uparrow$$

$$\theta_A = -0.0882 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$u_D = 10.6398 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \searrow$$

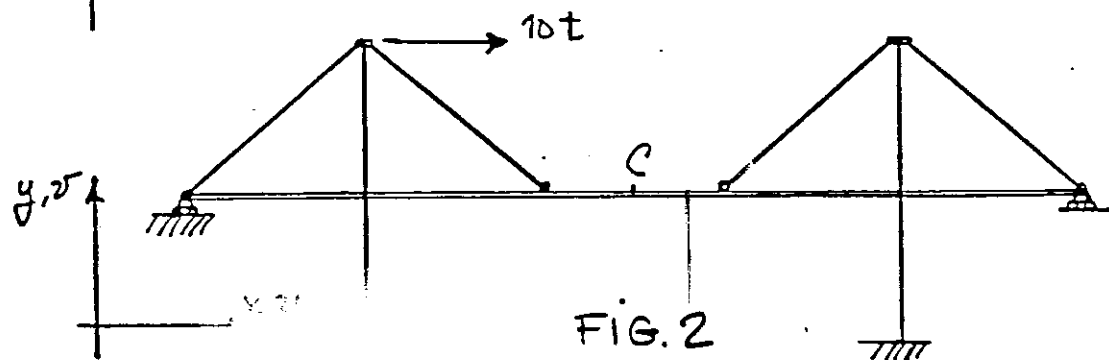
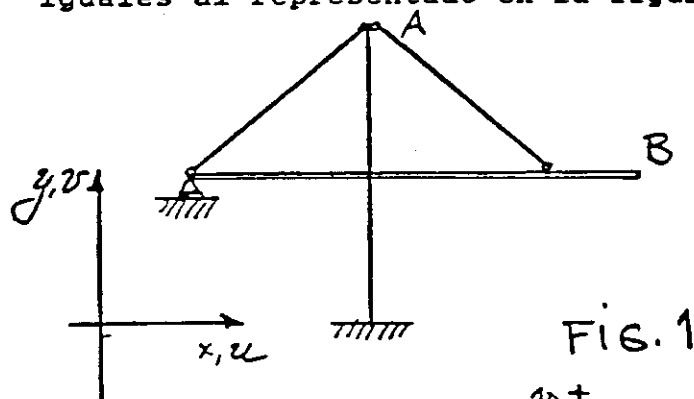
PROBLEMA 1º.—De la estructura de la figura 1, de la que se conoce la matriz $\underline{F}_B$ en el nudo B tal y como se indica en dicha figura, se sabe que al aplicar una carga unidad horizontal dirigida hacia la derecha en el nudo A, los movimientos del nudo B son:

$$\begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 14 \text{ m} \\ -31 \text{ m} \\ -2 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Calcular los movimientos del punto C de la estructura de la figura 2, sabiendo que está formada por la unión elástica en C de dos elementos iguales al representado en la figura 1.

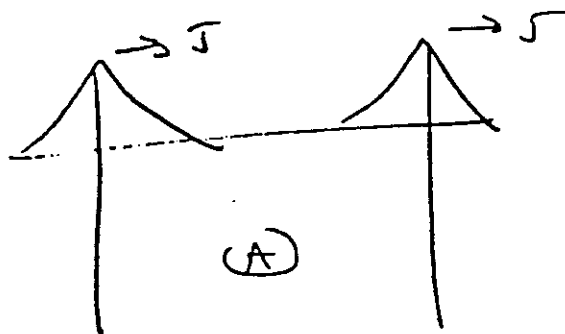
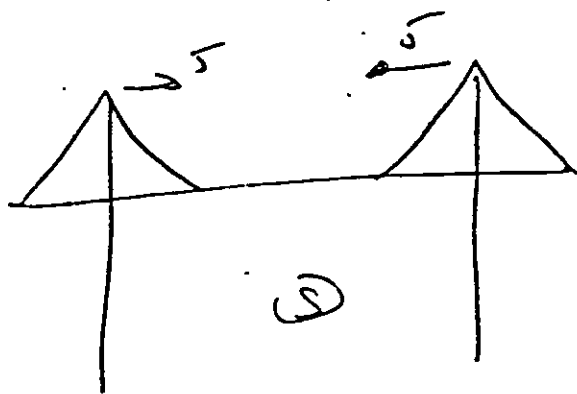
$$\begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \underline{F}_B \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ M_B \end{Bmatrix}$$

$$\underline{F}_B = 10^4 \begin{bmatrix} 14 & -7 & -0.4 \\ -31 & 94 & 15 \\ 2 & 15 & 5 \end{bmatrix} \text{ (m, m y K)}$$

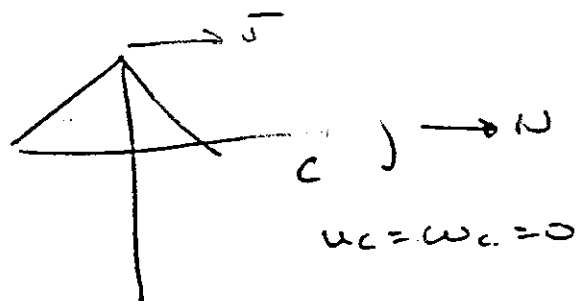


(4-12)

Descomponer en (S) y (A).



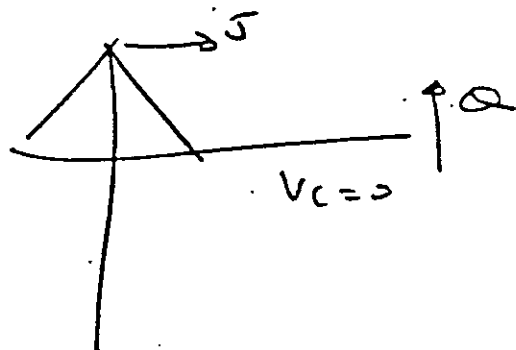
Cortamos la estructura:



Por condiciones de simetría

los apoyos
comineto
vertical de c

Reamos lo mismo



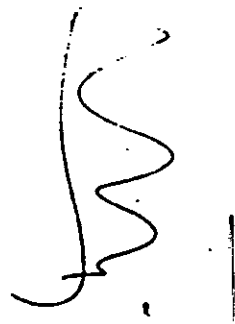
los apoyos
comineto horizontal
y de c.

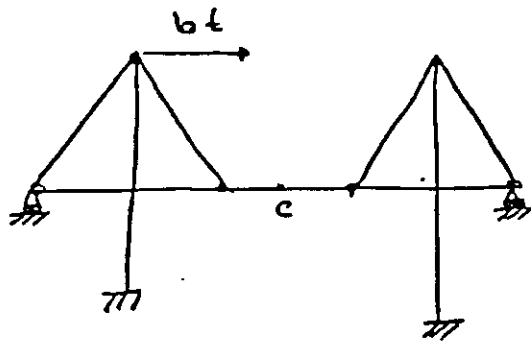
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \end{Bmatrix} = j \begin{Bmatrix} 14 \\ -31 \\ -2 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} + \begin{pmatrix} 4 & -7 & -0.4 \\ -7 & 94 & 15 \\ -0.4 & 15 & 5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

22 (a) $\begin{Bmatrix} u_c \\ 0 \\ \omega_c \end{Bmatrix} = j \begin{Bmatrix} 14 \\ -31 \\ -2 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & -0.4 \\ -7 & 94 & 15 \\ -0.4 & 15 & 5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ u_1 \end{Bmatrix}$

Problem mit der Riste und Ostern:

$$\left. \begin{aligned} u_c &= 5.846 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_c &= -8.024 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \omega_c &= 1.474 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned} \right\}$$





Problema 1

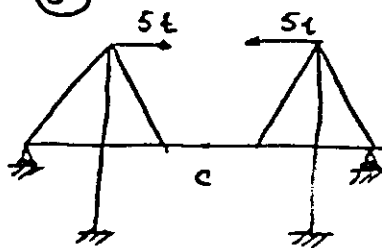
696

Examen Reserva 89-90

lo descomponemos en los sistemas

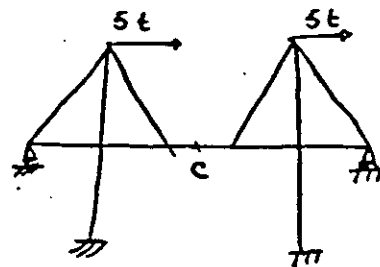
Simétrico

(S)



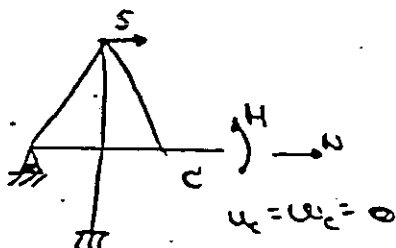
Antisimétrico

(A)

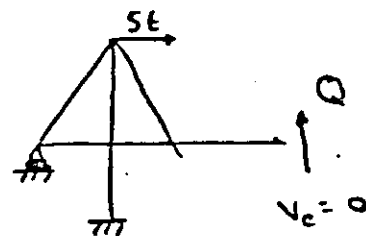


(+)

Por condiciones de simetría sólo hay despl. vertical en c



Por condiciones de antisimetría sólo hay corrimiento horizontal y giro en c



(S)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 14 \\ -31 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} + \begin{bmatrix} 9 & -7 & -0.4 \\ -7 & 94 & 15 \\ -0.4 & 15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ H \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

(A)

$$\begin{bmatrix} u_c \\ 0 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -31 \\ -2 \end{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} + \begin{bmatrix} 9 & -7 & -0.4 \\ -7 & 94 & 15 \\ -0.4 & 15 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo ambos sistemas:

$$u_c = 5.846 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

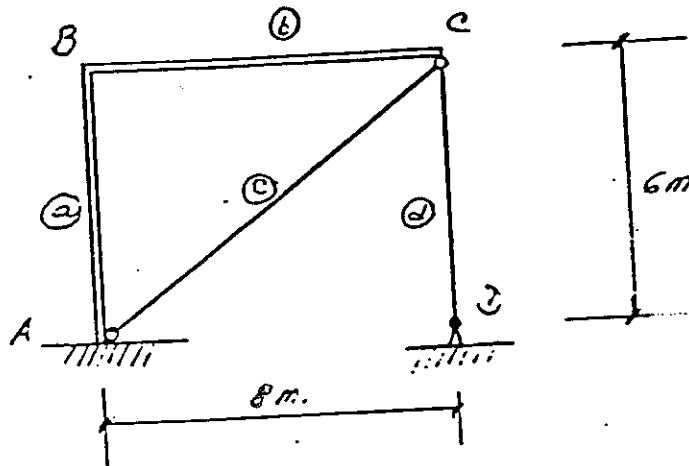
$$v_c = -8.024 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega_c = 1.474 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

PROBLEMA 1:.- Calcular por métodos matriciales los movimientos en los nudos B y C de la estructura representada en la figura, si las barras c y d sufren un aumento de temperatura de 40°C .

Datos:

Barras a y b : $I = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$; $A = 0.15 \text{ m}^2$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$
 Barras c y d : $\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$; $A = 20 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$



Matriz de rigidez de la estructura:

$$K = \begin{pmatrix} K_{22}^a + K_{11}^b & K_{12}^b \\ K_{21}^b & K_{22}^b + K_{21}^c + K_{22}^d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a, b \begin{cases} EI = 6.25 \times 10^3 \text{ Tm}^2 \\ EA = 800 \times 10^3 \text{ T} \end{cases} \\ c, d \Rightarrow EA = 40 \times 10^3 \text{ T} \end{matrix}$$

Matrices elementales:

- BARRA a:

$$K_{22}^a = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3472 & -1.0416 \\ 0 & -1.0416 & 4.1666 \end{pmatrix}$$

$$K_{22}^a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 10^3 \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3472 & -1.0416 \\ 0 & -1.0416 & 4.1666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & -8.3472 & 1.0416 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0416 & 4.1666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$K_{22}^a = \begin{pmatrix} 0.3472 & 0 & 1.0416 \\ 0 & 50 & 0 \\ 1.0416 & 0 & 4.1666 \end{pmatrix}$$

- BARRA b:

$$K_{11}^b = 10^3 \begin{pmatrix} 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1465 & 0.5859 \\ 0 & 0.5859 & 3.125 \end{pmatrix} \quad K_{22}^b = 10^3 \begin{pmatrix} 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1465 & -0.5859 \\ 0 & -0.5859 & 3.125 \end{pmatrix}$$

$$K_{12}^b = K_{21}^{bT} = \begin{pmatrix} -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1465 & 0.5859 \\ 0 & -0.5859 & 1.5625 \end{pmatrix}$$

- BARRA c:

$$K_{22}^c = 10^3 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{22}^c = \begin{pmatrix} 2.6 & -4.6 & 0 \\ 0.6 & 2.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 10^3 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 3.2 & 2.4 & 0 \\ 2.4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$K_{22}^c = 10^3 \begin{pmatrix} 2.56 & 1.92 & 0 \\ 1.92 & 1.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- BARRA d:

$$K_{22}^d = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 10^3 \begin{pmatrix} 6.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 6.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



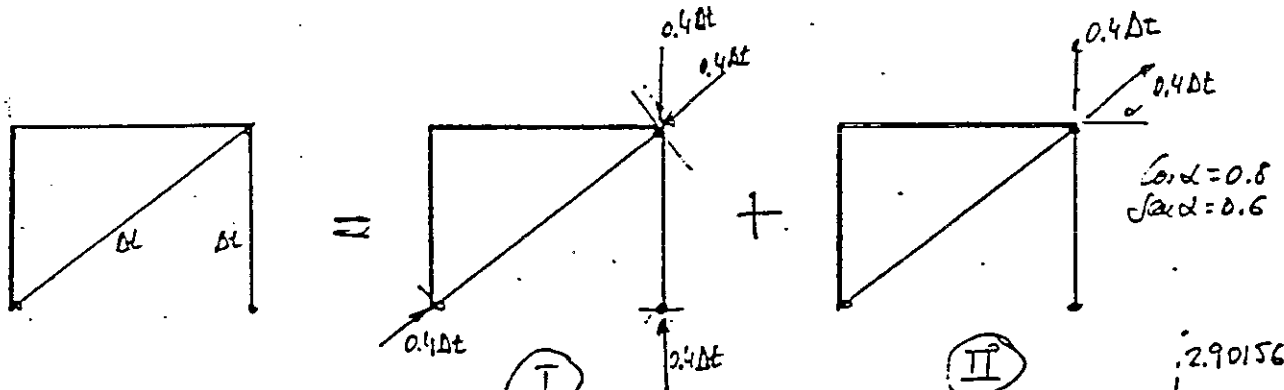
Matriz de rigidez de la estructura:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 37.8422 & 0 & 1.0416 & -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 50.1465 & 0.5859 & 0 & -0.1465 & 0.5859 \\ 1.0416 & 0.5859 & 7.2916 & 0 & -0.5859 & 1.5625 \\ -37.5 & 0 & 0 & 40.06 & 1.92 & 0 \\ 0 & -0.1465 & -0.5859 & 1.92 & 8.25316 & -0.5859 \\ 0 & 0.5859 & 1.5625 & 0 & -0.5859 & 3.125 \end{bmatrix}$$

Cargas:

$$\Delta L = \alpha \Delta t L$$

$$N = EA \alpha \Delta t = 2 \times 10^7 \times 20 \times 10^{-4} \times 10^{-5} \times \Delta t = 0.4 \times \Delta t$$



$$P = \begin{Bmatrix} P_B \\ P_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.32 \Delta t \\ 0.64 \Delta t \\ 0 \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -37.5 & 0 & 0 & 40.06 & 1.92 & 0 \\ 0 & -0.1465 & -0.5859 & 1.92 & 8.25316 & -0.5859 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.90156 \\ 0.00386 \\ -0.3545 \\ 2.91858 \\ 2.44282 \\ 0.63155 \end{Bmatrix}$$

De la 4ª ecuación: $0.32 \Delta t = 12.8 \Rightarrow \Delta t = 40^\circ C$

Como comprobación en la 5ª ecuación: $0.64 \Delta t = 25.6 \Rightarrow \Delta t = 40^\circ C$

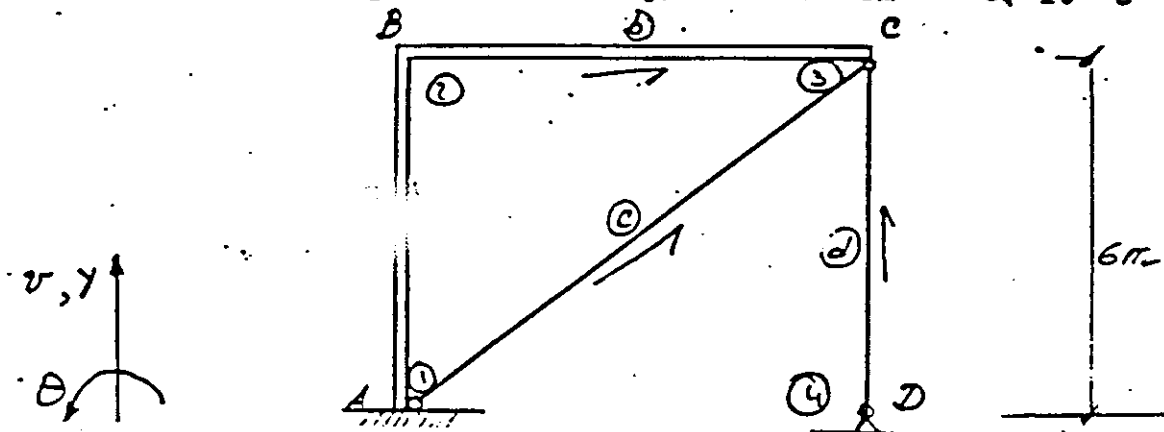
PROBLEMA 2º-Calcular el incremento de temperatura que sufren las barras c y d de la estructura representada en la figura, si se sabe que los movimientos producidos en los nudos B y C por dicho incremento de temperatura son:

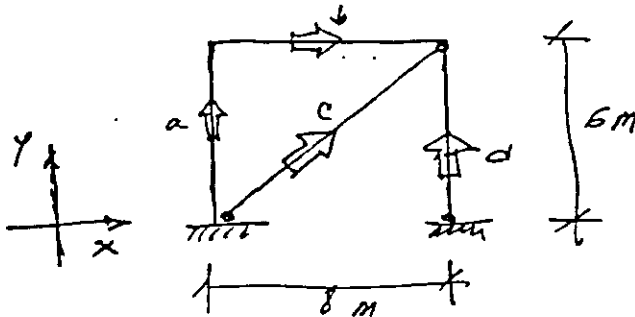
$$\underline{\delta}_B = \{0.36273 \text{ cm} \quad 0.000483 \text{ cm} \quad -0.000443 \text{ rad}\}^T \equiv \{u_B \quad v_B \quad \theta_B\}^T$$

$$\underline{\delta}_C = \{0.36486 \text{ cm} \quad 0.305344 \text{ cm} \quad 0.000793 \text{ rad}\}^T \equiv \{u_C \quad v_C \quad \theta_C\}^T$$

Datos: Barras a y b: $E=2 \cdot 10^4 \text{ Kg/cm}^2$ $I=3.125 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$ $A=1500 \text{ cm}^2$

Barras c y d: $E=2 \cdot 10^4 \text{ Kg/cm}^2$ $A=20 \text{ cm}^2$ $\alpha=10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$





Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} K_{22}^{(a)} + K_{11}^{(c)} & K_{12}^{(b)} \\ K_{21}^{(b)} & K_{22}^{(b)} + K_{22}^{(c)} + K_{22}^{(d)} \end{bmatrix}$$

Para a:

$$K_{22}^{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3472 & -104.16 \\ 0 & -104.16 & 41665.6 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(b)} = T' K_{22}^{(a)} T = \begin{bmatrix} 0 & -0.3472 & 104.16 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & -104.16 & 41665.6 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 0.3472 & 0 & 104.16 \\ 0 & 50 & 0 \\ 104.16 & 0 & 41665.6 \end{bmatrix}$$

Para b:

$$K_{11}^{(b)} = 10^4 \begin{bmatrix} 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1465 & 58.59 \\ 0 & 58.59 & 31250.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(b)} = 10^4 \begin{bmatrix} 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1465 & -58.59 \\ 0 & -58.59 & 31250.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^{(b)} = K_{21}^{(b)T} = \begin{bmatrix} -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1465 & 58.59 \\ 0 & -58.59 & 15625.5 \end{bmatrix}$$



Barrac:

$$K_n^{(c)} = 10^4 \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_n^{(c)} = T^T K_n^{(c)} T = 10^4 \begin{bmatrix} 320 & 0 & 0 \\ 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 256 & 192 & 0 \\ 192 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

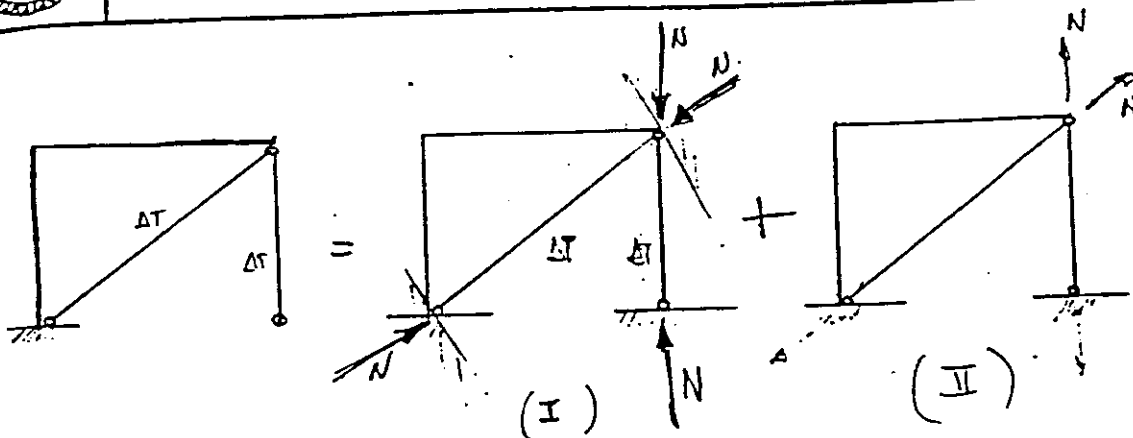
Barrad:

$$K_n^{(d)} = 10^4 \begin{bmatrix} 6.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_n^{(d)} = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

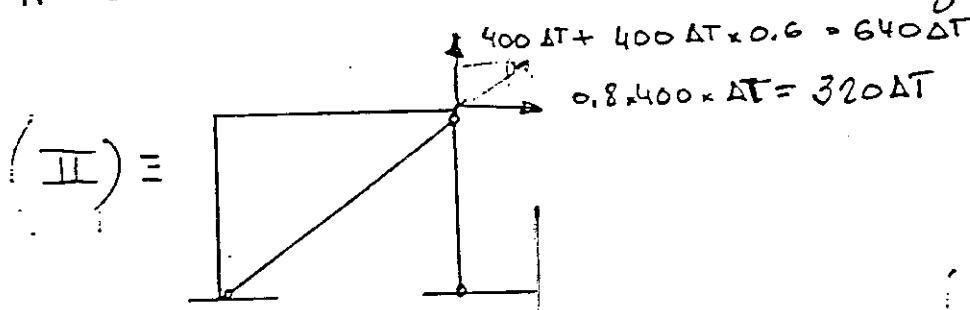
Matriz de rigidez de la estructura.

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 37.87 & 0 & 104.16 & -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 50.1465 & 58.59 & 0 & 0 & 0 \\ 104.16 & 58.59 & 72916.6 & 0 & 58.59 & 15625 \\ -37.5 & 0 & 0 & 40.06 & 1.92 & 0 \\ 0 & -0.1465 & -58.59 & 1.92 & 6.25316 & -58.59 \\ 0 & 58.59 & 15625 & 0 & -58.59 & 31250 \end{bmatrix}$$



$$\Delta L = \alpha \Delta T L = \frac{N K}{EA}$$

$$N = EA \alpha \Delta T = 2 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-5} \Delta T = 400 \Delta T \text{ kg}$$



Por tanto el vector de cargas es:

$$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 320 \Delta T \\ 640 \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.78 \\ 2.56 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.6 \\ 5.2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nota: Si $\Delta T = 50^\circ C$ resolviendo el sistema se obtienen los siguientes desplazamientos.

$$\begin{Bmatrix} 0.36273 \\ 0.000483 \\ -0.000443 \\ 0.364856 \\ 0.305344 \\ 0.000793 \end{Bmatrix} \Rightarrow 50^\circ C$$

$$\begin{Bmatrix} 0.2853 \\ 0.000325 \\ -0.000345 \\ 0.28756 \\ 2.250297 \\ 0.000541 \end{Bmatrix} \Rightarrow 40^\circ C$$



Si se dan los desplazamientos y se pide el ΔT :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 320\Delta T \\ 640\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{Bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ -37.5 & 0 & 0 & 40.06 & 1.92 & 0 \\ 0 & -0.1465 & -58.59 & 1.92 & 823316 & -58.59 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.36273 \\ 0.000483 \\ -0.000443 \\ 0.354856 \\ 0.305344 \\ 0.000773 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta T = \frac{10^4}{320} \left[-37.5 \times 0.35273 + 40.06 \times 0.354856 + 1.92 \times 0.305344 \right] = \underline{\underline{50^\circ C}}$$

Comprobamos con la otra ecuación.

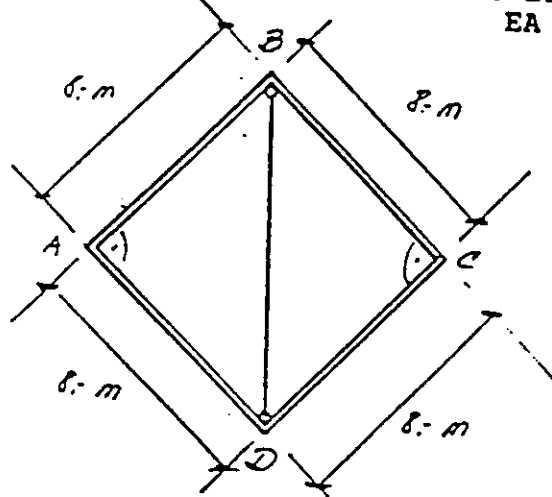
$$\Delta T = \frac{10^4}{640} \left[-0.1465 \times 0.000483 + 58.59 \times -0.000443 + 1.92 \times 0.354856 + 823316 \times 0.305344 - 58.59 \times 0.000773 \right] = \underline{\underline{50^\circ C}}$$

PROBLEMA 12.- Calcular matricialmente el corrimiento relativo entre los nudos A y C de la estructura de la figura, así como el axil en el tirante BD, cuando este sufre una disminución de temperatura de 40 °C.

Datos : Tirante BD : $EA = 12000.- T$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Resto de la barras : $EI = 6000.- \text{ m}^2\text{T}$
 $EA = 8000.- T$

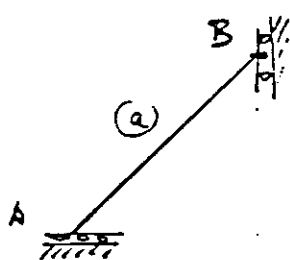
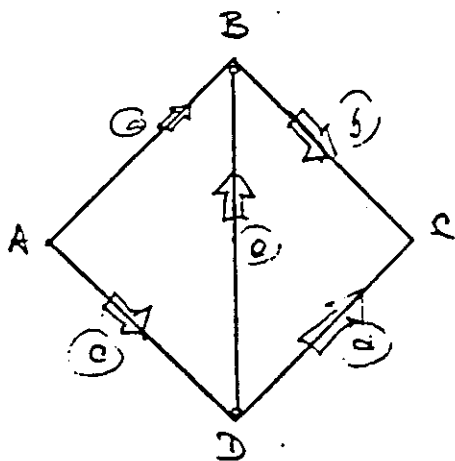




$N = \alpha \Delta T E A = 10^{-5} \times 40 \times 12000 = 4.8 T$



$$\underline{I} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ P_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.8 \end{Bmatrix}$$



$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^e & K_{12}^a & 0 & K_{12}^e \\ K_{21}^a & K_{22}^e + K_{22}^a + K_{22}^b & K_{22}^b & K_{21}^e \\ 0 & K_{21}^b & K_{21}^e + K_{22}^d & K_{21}^d \\ K_{21}^e & K_{12}^e & K_{12}^d & K_{11}^e + K_{12}^c + K_{12}^d \end{bmatrix}$$

SIMETRIA VERTICAL

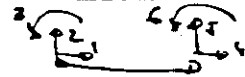
$$\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ 0 \\ v_B \\ 0 \\ -u_A \\ v_A \\ -\theta_A \\ 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

AL TENER ADENMÁS EN CUENTA LA SIMETRÍA HORIZONTAL

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_B \\ 0 \\ -u_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\underline{K} \begin{Bmatrix} 2u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2v \\ 0 \\ -2u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\underline{K}_{local} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}; \quad \underline{T}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BARRES:

$$\frac{EA}{L} = 1000 \text{ T/m}$$

$$\frac{4EI}{L} = 3000 \text{ T/m}$$

$$\underline{K}_{global} = \underline{T}^T \underline{K}_{local} \underline{T}$$

BARRA 0:

$$\frac{EA}{L} = 750 \sqrt{2}$$

SOLO SE MUESTRA:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 2281.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2281.25 & 1125\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1125\sqrt{2} & 12000 & 0 & 0 & 0 \\ -1140.625 & 857.375 & -562.5\sqrt{2} & 2281.25 & 0 & 1125\sqrt{2} \\ -857.375 & -1140.625 & -562.5\sqrt{2} & 0 & 4402.5 & 0 \\ 562.5\sqrt{2} & 562.5\sqrt{2} & 3000 & 1125\sqrt{2} & 0 & 12000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1500\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_B \\ 0 \\ -u_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v_B \end{Bmatrix}$$



$$0 = 2281.25 u_A - 2 \cdot 859.875 u_B \quad \left. \begin{array}{l} 2281.25 u_A - 1718.75 u_B = 0 \\ -4.8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 [-2 \cdot 859.375 u_A + (4402.57 + 1500\sqrt{2}) u_B] - 859.375 u_A + 3261.9452 u_B = -4.8 \end{array} \right\}$$

$$u_A = \frac{1718.75}{2281.25} u_B = -1.3832 \times 10^{-3} \Rightarrow u_A = 1.3832 \times 10^{-3}$$

$$-647.4743 u_B + 3261.9452 u_B = -4.8$$

$$u_B = -1.836 \times 10^{-3} \Rightarrow u_B = 1.836 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{AC} = u_A + u_B = 2 \times 1.3832 \times 10^{-3} = 2.76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

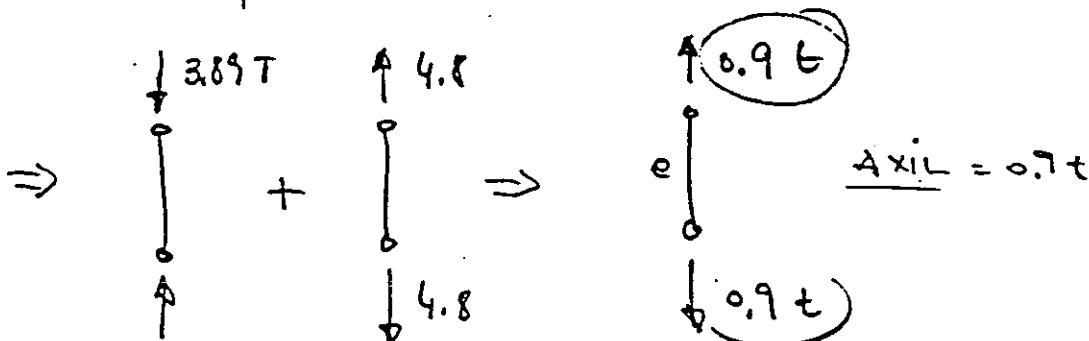
AxIL en TIRANTE.



$$F_2 = K_{21}^e d_1 + K_{22}^e d_2$$

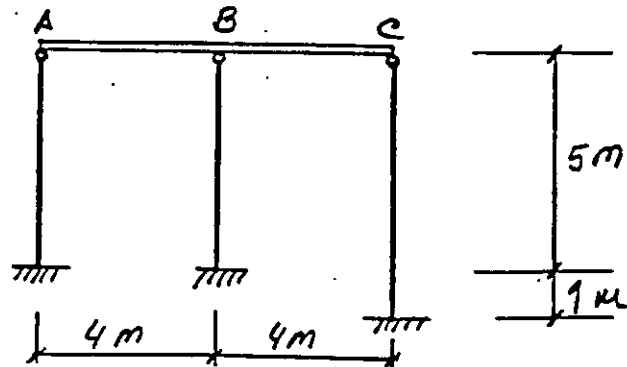
$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1500\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1.836 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3} + \begin{pmatrix} 1500\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -6836 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

$$N_2 = -3.89 \text{ T}$$



PROBLEMA 2.—Las barras verticales de la figura tienen rigidez infinita frente a esfuerzos axiales y $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ t} \cdot \text{m}^3$. La barra $\overline{ABC}$ tiene $EA = 1000 \text{ t}$.

Calcular por métodos matriciales el corrimiento horizontal de A, B y C así como los axiles en la barra $\overline{ABC}$ si esta sufre un aumento de temperatura de 40°C ($\alpha = 10^{-4} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$).



②

$$u_A = \frac{F_1 \cdot 3^3}{3 \cdot 20000} \quad u_B = \frac{F_2 \cdot 3^3}{3 \cdot 20000} \quad u_C = \frac{F_3 \cdot 3^3}{3 \cdot 20000} \Rightarrow \begin{cases} \bar{F}_1 = \frac{60000}{125} & \bar{u}_A = 480 \bar{u}_A \\ \bar{F}_2 = \frac{60000}{125} & \bar{u}_B = 480 \bar{u}_B \\ \bar{F}_3 = \frac{60000}{216} & \bar{u}_C = 278 \bar{u}_C \end{cases}$$

PROB (0): Nodos empotrados. Por DT garantice:

$$N = E A \alpha \Delta T = 1000 \times 10^{-5} \times 40 = 0,4 t$$

PROB (1):

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,4 - 480 u_A \\ -480 u_B \\ 0,4 - 278 u_C \end{Bmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{23} \\ 0 & K_{31} & K_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} = \frac{EJ}{L} = K_{12} = \frac{1000}{4} = 250 \\ K_{12} = K_{21} = -\frac{EJ}{L} = -250 \end{aligned} \right\} K_{global} = \begin{bmatrix} \frac{EJ}{L} & -\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EJ}{L} & \frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 250 & -250 & 0 \\ -250 & 500 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}$$

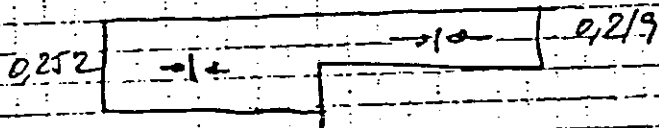
$$P = K d$$

$$\begin{Bmatrix} -0,4 - 480 \mu A \\ -480 \mu A \\ 0,4 - 278 \mu C \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 250 & -250 & 0 \\ -250 & 500 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5,25 \times 10^{-4} \\ 6,701 \times 10^{-5} \\ 7,896 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \mu$$

Objetivo: Calcular F_1, F_2, F_3



Ejemplo

$$= -0,4 + \begin{cases} P_{a1} = K_{u1} d_{a1} + K_{u2} d_{a2} = \\ = -250 \times (-5,25 \times 10^{-4}) - 250 \times (6,701 \times 10^{-5}) = \\ = -0,148 \end{cases} = -0,252$$

$$= -0,4 + \begin{cases} P_{b2} = K_{u1} d_{b1} + K_{u2} d_{b2} = \\ = -250 \times (6,701 \times 10^{-5}) + 250 \times (7,896 \times 10^{-4}) = \\ = -0,219 \end{cases}$$

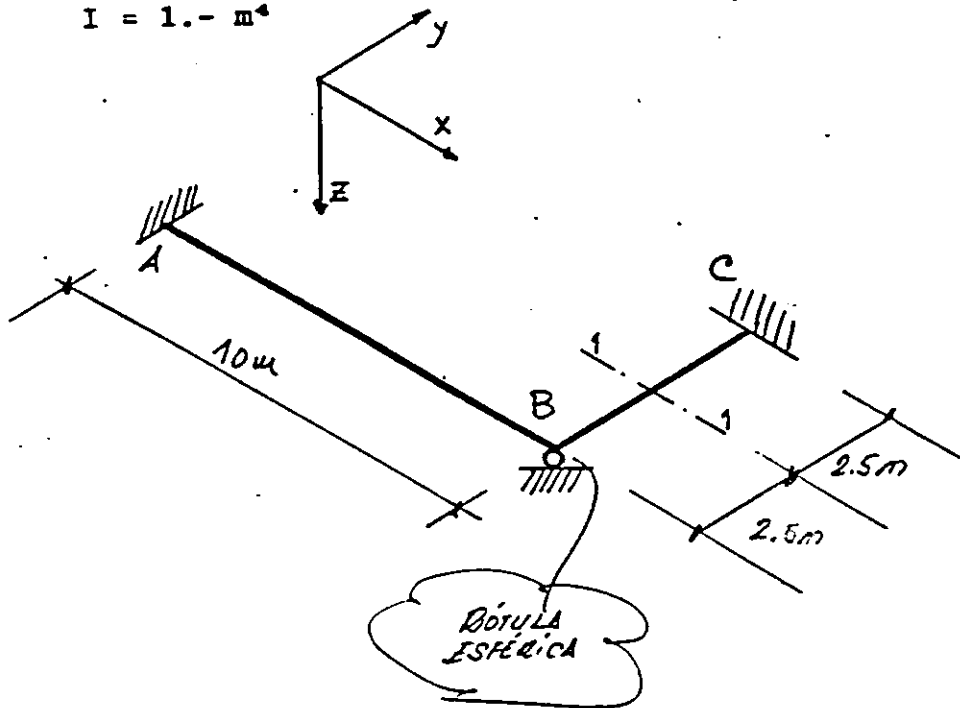
PROBLEMA 22.- Calcular, aplicando formulación matricial, la línea de influencia del momento torsor en la sección 1-1 de la estructura representada en la figura, cuando una carga unidad dirigida hacia abajo recorre la barra AB.

Datos: $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$G = 10^6 \text{ kg/cm}^2$

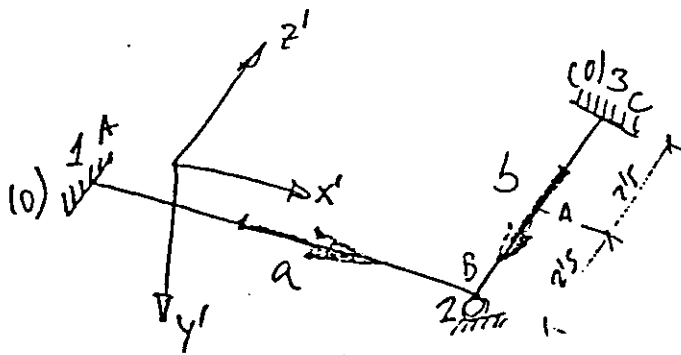
$J = 0.5 \text{ m}^4$

$I = 1. \text{ m}^4$



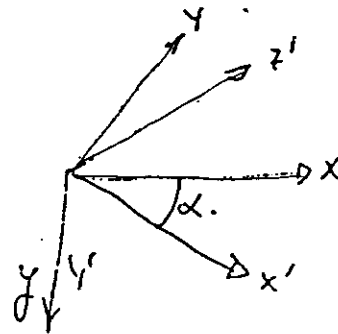
Practice - 19

1



$$W = M_T \cdot \frac{L}{G \cdot J}$$

$$\frac{E \Omega}{L} \rightarrow \frac{G J}{L}$$



$$K = (K'_{22a} + K'_{22b})$$

$$G \cdot J = 5 \cdot 10^6$$

$$E I = 20 \cdot 10^6$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ T/cm}^2$$

$$G = 10^7 \text{ T/cm}^2$$

$$J = 0.5 \text{ m}^4$$

$$I = 1 \text{ m}^4$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

barra a

$$K'_{22a} = K'_{22a} = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 8 \end{pmatrix}$$

barra b

$$K'_{22b} = 10^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.92 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 16 \end{pmatrix}$$

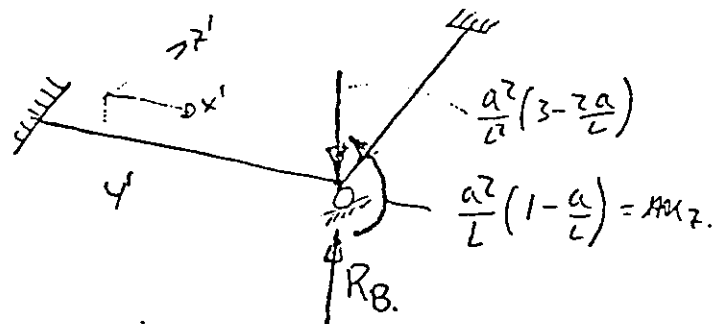
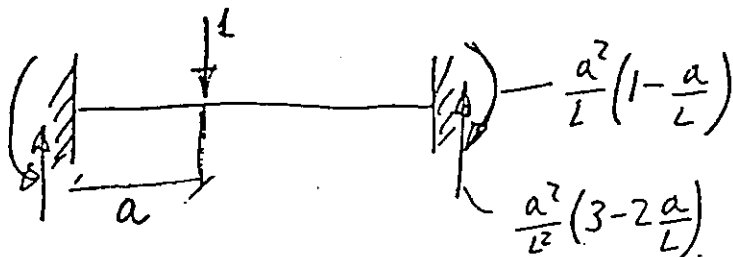
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22b} = 10^6 \begin{pmatrix} 0 & -4.8 & 16 \\ 0 & 1.92 & -4.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 16 & -4.8 & 0 \\ -4.8 & 1.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Practica 19.

Para la barra a

$$K = 10^6 \begin{pmatrix} 16.5 & -4.8 & 0 \\ -4.8 & 2.16 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 9 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2}{L^2} \left(3 - \frac{2a}{L} \right) - R_B \\ -\frac{a^2}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 16.5 & -4.8 & 0 \\ -4.8 & 2.16 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_x \\ \delta'_2 \\ \theta'_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{a^2}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 16.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_x \\ \delta'_2 \\ \theta'_z \end{pmatrix}$$

$$10^6 9 \theta'_z = -\frac{a^2}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right)$$

$$\theta'_z = -\frac{1}{900} \frac{a^2}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \cdot 10^{-4}$$

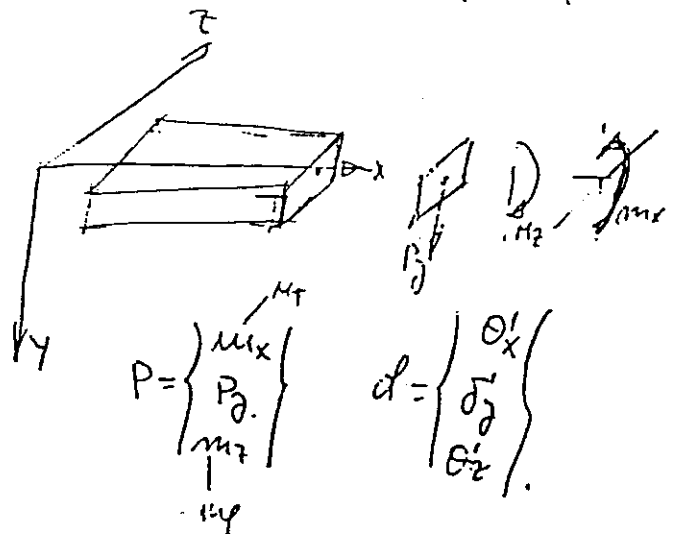
$$\theta'_x = 0$$

$$\delta'_2 = 0$$

Para la barra b

$$P'_2 = K'_{27b} \cdot d_1 + K'_{22b} \cdot d_2 = K'_{22b} \cdot d_2$$

↓
0



Practica - 19.

3

$$D'_2 = k'_{22} b \cdot \phi'_2$$

$$\begin{Bmatrix} m'_x \\ p'_2 \\ m'_z \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 16 & -4'8 & 0 \\ -4'8 & 1'92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta'_z \end{Bmatrix}$$

$$m'_z = m'_T = 10^6 \cdot \theta'_z = -\frac{100}{900} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{a^2}{L} = -\frac{1}{90} a^2 \left(1 - \frac{a}{10}\right) = \frac{1}{900} a^2 (a - 10)$$

$$\boxed{M'_z = \frac{1}{900} (a^3 - 10a^2)}$$

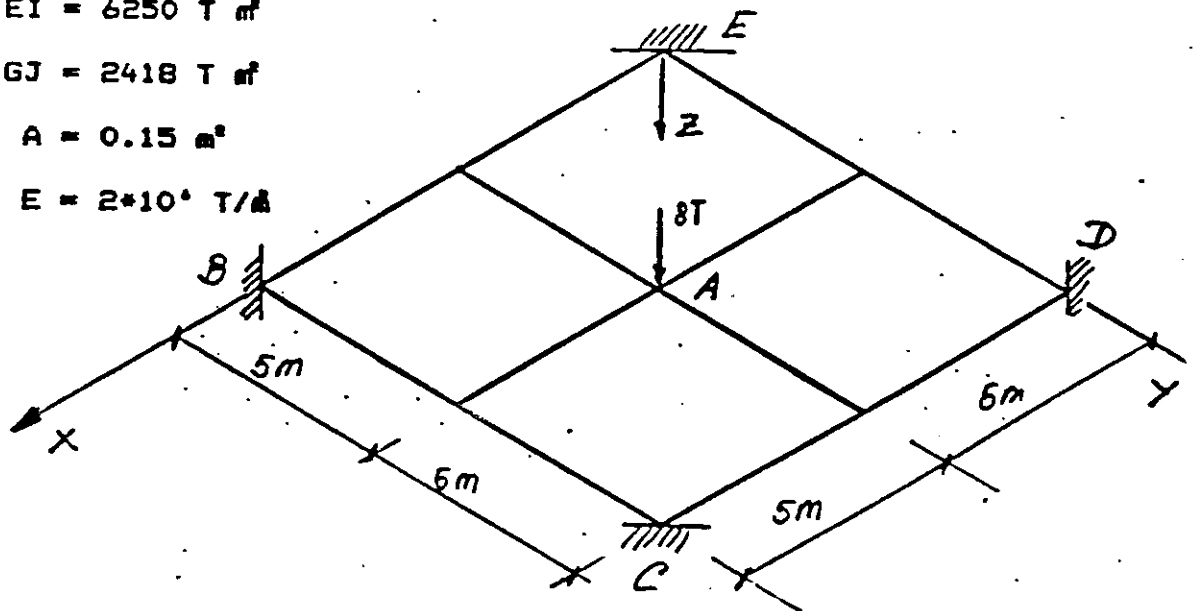
PROBLEMA 22. - Calcular la flecha en el punto A y los momentos torsores en B, C, D y E del emparrillado representado en la figura.

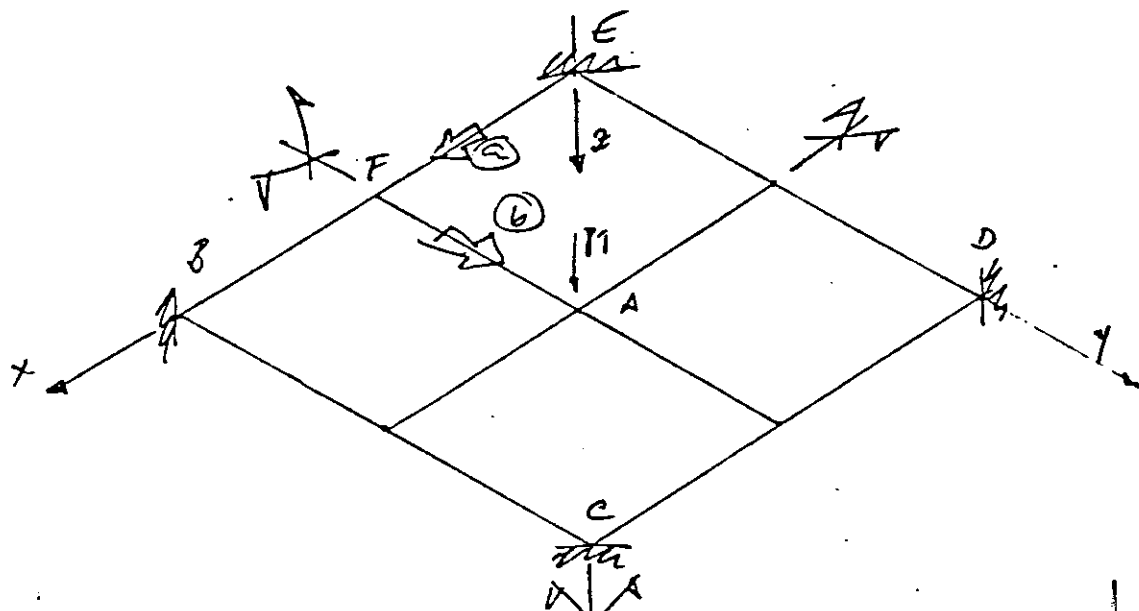
Datos: $EI = 6250 \text{ T m}^2$

$GJ = 2418 \text{ T m}^2$

$A = 0.15 \text{ m}^2$

$E = 2 \cdot 10^4 \text{ T/m}$



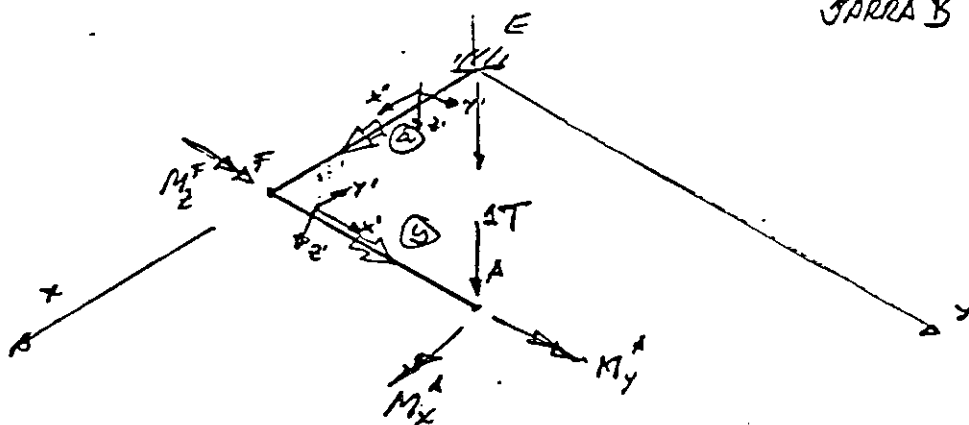


Debido a la simetría: se corta por los ejes indicados, con las propiedades:

$$\begin{cases} w_x^A = w_y^A = 0 \\ w_y^F = 0 \end{cases}$$

PARA B: se debe tomar

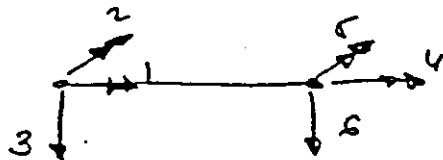
$$\frac{EI}{2} \text{ y } \frac{GF}{2}$$



Matriz de rigidez de la estructura

$$K = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$1 = 501007 \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$K' = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{6EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad \text{sim} \quad //$$

$$= \begin{bmatrix} 242 & 0 & 0 & -242 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 750 & 0 & 1250 & -750 \\ 0 & 750 & 800 & 0 & 750 & -800 \\ -242 & 0 & 0 & 242 & 0 & 0 \\ 0 & 1250 & 750 & 0 & 2500 & -750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -750 & 800 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^a = K_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 484 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 1500 \\ 0 & 1500 & 600 \end{bmatrix}$$



$$K = L K' L^T$$

$$K_{11}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_{11}^{(6)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & -750 \\ 0 & 242 & 0 \\ -750 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_{22}^{(6)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 750 \\ 0 & 242 & 0 \\ 750 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_{12}^{(6)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1250 & 0 & 750 \\ 0 & -242 & 0 \\ -750 & 0 & -300 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1250 & 0 & -750 \\ 0 & -242 & 0 \\ 750 & 0 & -300 \end{bmatrix}$$

$$K \delta = F$$

$$\begin{bmatrix} 2984 & 0 & -750 & 1250 & 0 & 750 \\ 0 & 5242 & 1500 & 0 & -242 & 0 \\ -750 & 1500 & 900 & -750 & 0 & -300 \\ 1250 & 0 & -750 & 2500 & 0 & 750 \\ 0 & -242 & 0 & 0 & 242 & 0 \\ -750 & 0 & -300 & 750 & 0 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x^F \\ \omega_y^F \\ \psi^F \\ \omega_x^A \\ \omega_y^A \\ \psi^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_x^A \\ M_y^A \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2984 & -750 & 750 \\ -750 & 900 & -300 \\ 750 & -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x^F \\ \psi^F \\ \psi^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x^F = -2.24 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ \psi^F = 1.67 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \psi^A = 10.6 \times 10^{-3} \text{ m} \end{cases}$$



Momento en esquinas por simetría es igual al de la barra @:

$$P_1^{\textcircled{a}} = K_{11} \delta_1^{\textcircled{a}} + K_{12} \delta_2^{\textcircled{a}} = K_{12} L^T \delta_2^{\textcircled{a}'} =$$

$\delta_1^{\textcircled{a}}$
Empotrado

$$\begin{Bmatrix} M_x^E \\ M_y^E \\ \phi_z^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -484 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & -9500 \\ 0 & -1500 & -600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -224 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 1.67 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.09 \text{ uT} \\ -2.49 \text{ uT} \\ -0.996 \text{ T} \end{Bmatrix}$$

Mon. tors

PROBLEMA 1° - Calcular el desplazamiento en B y el esfuerzo en el tirante del emparrillado de la figura.

Datos: Barras AB y CB: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

Tirante BD: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$

$A = 0.5 \cdot 0.3 \text{ m}^2$ (canto * ancho)

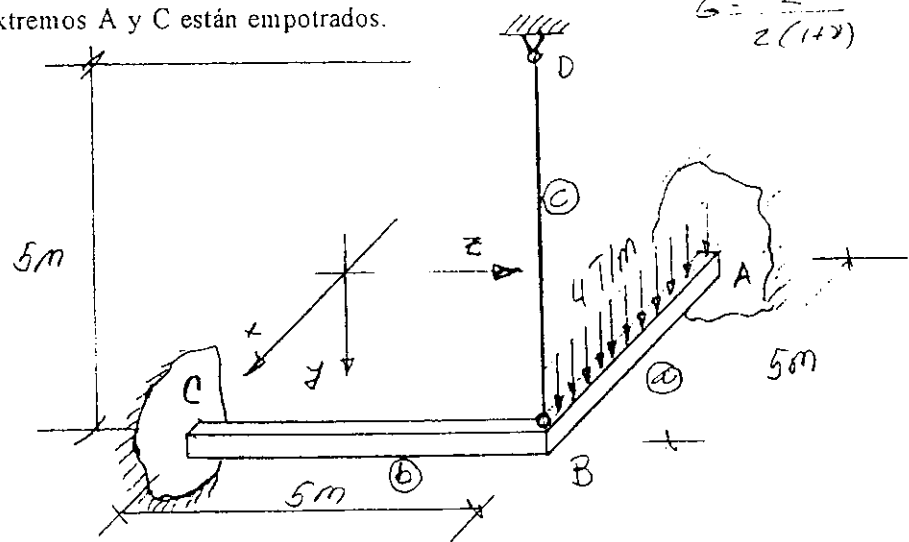
$A = 0.05 \cdot 0.02 \text{ m}^2$

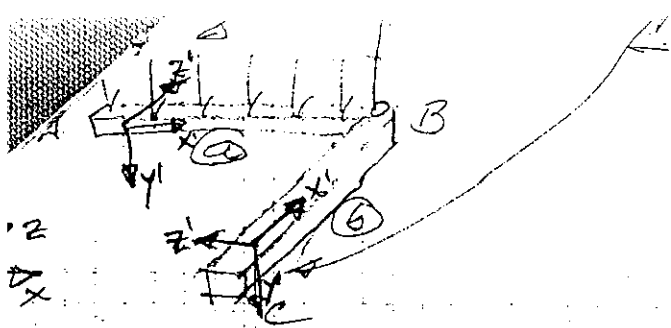
$\nu = 0.15$

$\nu = 0.2$

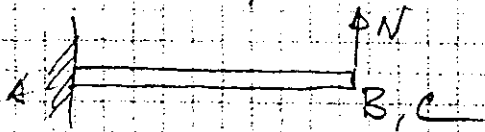
$J = 3.159 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ (inercia a torsión)

Nota: los extremos A y C están empotrados.

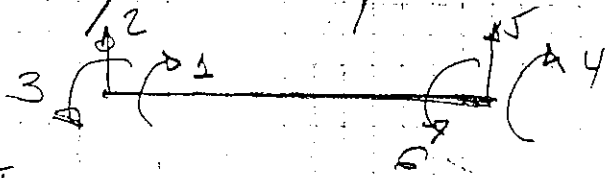




Es un emparrillado plano con dos barras y un nudo. Quitamos el tirante y ponemos la fuerza N , que calcularemos por compatibilidad de movimientos.



Elemento de emparrillado plano:



$$K' = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad \text{Sim.} \quad = \begin{pmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{pmatrix}$$

$$K' = \begin{pmatrix} -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{2 \times 10^5}{2(140,5)} = 869,565 \times 10^3 \text{ T/m}^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6 \Rightarrow K = 0,234 \Rightarrow \bar{V} = 0,234 \times 0,3^3 \times 0,5 = 3,159 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

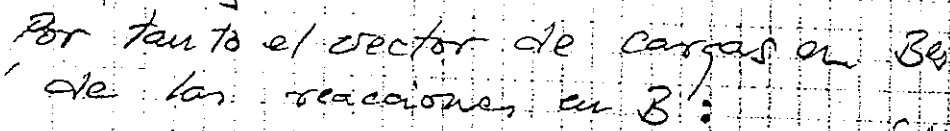
$$K'_{22} = \begin{pmatrix} 549,4 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -1500 \\ 0 & -1500 & 5000 \end{pmatrix}$$

Matrices de nœuds en global:

$$\Rightarrow K_{b22} = \frac{1}{16} K_{b22}' T_b T = \begin{pmatrix} 5000 & 1200 & 0 \\ 1200 & 660 & 0 \\ 0 & 0 & 549,4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{K} = K_{a22} + K_{b22} = \begin{pmatrix} 5549,4 & 1500 & 0 \\ 1500 & 1200 & -1500 \\ 0 & -1500 & 5549,4 \end{pmatrix}$$

ORRIS CALZADA



$$P_B = \begin{Bmatrix} M_{Bx} \\ V_y \\ M_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \text{ N} \\ 25/3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10-N \\ +\frac{25}{3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 5549,4 & 1500 & 0 \\ 1500 & 1200 & -1500 \\ 0 & -1500 & 5549,4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{Bx} \\ V_B \\ \theta_{Bz} \end{Bmatrix}$$

4 incognites

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 5549,4 \theta_{Bx} + 1500 V_B \\ 10-N &= 1500 \theta_{Bx} + 1200 V_B - 1500 \theta_{Bz} \\ -\frac{25}{3} &= -1500 V_B + 5549,4 \theta_{Bz} \end{aligned} \right\}$$

$$\theta_{Bx} = -\frac{1500}{5549,4} V_B \rightarrow \theta_{Bx} = -4,77 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_{Bz} = \frac{-\frac{25}{3} + 1500 V_B}{5549,4} \rightarrow \theta_{Bz} = -10,246 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$10-N = \left(-2 \frac{1500}{5549,4} + 1200 \right) V_B + \frac{25 \times 1500}{3 \times 5549,4}$$

389,1 2,2525

$$V_B = \frac{7,7475 - N}{389,1}$$

La otra acción se obtiene de tirante:



$$V_B = \frac{N \cdot L}{EA} = N \frac{L}{2 \times 10^7 \times 0,05 \times 0,07}$$

$$N = \frac{2 \times 10^7 \times 0,05 \times 0,07}{L} V_B$$

$$N = 4000 V_B$$

$$389,1 V_B = 7,7475 - 4000 V_B$$

$$V_B = \frac{7,7475}{4389,1} = 1,765 \times 10^{-3} \text{ m}$$

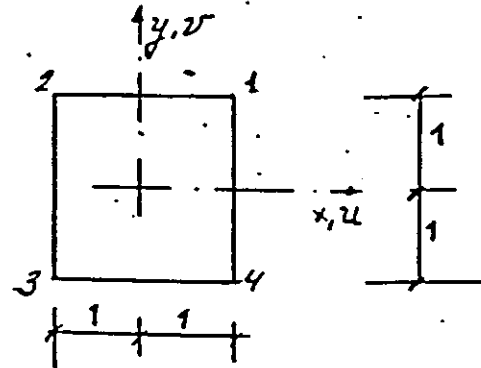
$$N = 7,0607 \text{ T}$$

PROBLEMA 32.- Obtener la matriz $\underline{B}$ de relación deformaciones-desplazamientos nodales para el elemento rectangular de cuatro nodos en tensión plana que se indica en la figura.

Los desplazamientos en el interior del elemento están definidos en coordenadas locales por:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$



$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \underline{\Phi} \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{U} = \underline{A} \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} -\underline{A}_1 & 0 \\ 0 & \underline{A}_1 \end{bmatrix} \underline{\alpha}$$

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A}_1^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$u = \underline{\Phi} \underline{\alpha} = \underline{\Phi} \underline{A}_1^{-1} \underline{U} = \underline{N} \underline{U}$$

$$\underline{N} = \underline{\Phi} \underline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{A}_1^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \underline{D} \underline{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \underline{N} =$$

$\begin{matrix} 3 \times 2 & 2 \times 8 \\ \hline 2 \times 8 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) \\ 1+x & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) & (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) \end{bmatrix}$$